UNIVERSITATEA DE ŞTIINŢE AGRICOLE ŞI MEDICINĂ VETERINARĂ A BANATULUI TIMIŞOARA

Facultatea de Management Agricol
ID – IMAPA

Curs de

Analiză matematică

CAPITOLUL 1. ŞIRURI ŞI SERII NUMERICE

1.1. Noţiuni de topologie

Clase speciale de spaţii topologice

Definiţie. Fie $X \neq \phi, T \subset P(X)$. Spunem că T este o topologie pe X dacă :

1. $\phi, X \in T$;
2. $(\forall) T_1, T_2 \Rightarrow T_1 \cap T_2 \in T$;
3. $(\forall)(T_i)_{i \in I} \in T \Rightarrow \bigcup_{i \in I} T_i \in T$.

Elementul lui T se numesc mulţimi deschise iar cuplul (X, T) se numeşte spaţiu topologic. Complementara unei mulţimi deschise se numeşte mulţime închisă.

Definiţie. Fie $X \neq \phi$. O funcţie $d : X \times X \to R_+$ cu proprietăţile :

1. $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$;
2. $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$;
3. $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$;

see numeşte metrică (distanţa) iar ansamblul (X, d) se numeşte spaţiu metric.

Definiţie. Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X$ şi r > 0.

Mulţimea $D(x_o, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ se numeşte discul deschis centrat în x_0 de rază r.

Teorema. Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci

$T_d = \phi \cup \{T \subset X : (\forall) x \in T, (\exists) r > o : D(x, r) \subset T\}$ este o topologie pe X, deci orice spaţiu metric este un spaţiu topologic.

Demonstraţie :

1. Din construcţia lui T_d avem că $\phi \in T_d$. Apoi este evident că $X \in T_d$ pentru că $(\forall) x \in X, (\forall) r > o$ avem $D(x, r) \subset X$.
2. Fie $T_1, T_2 \in T$. Fie $\in T_1 \cap T_2$. Rezultă că $x \in T_1$ şi $x \in T_2$ şi deci $(\exists) r_1 > 0 : D(x, r_1) \subset T_1$ şi $(\exists) r_2 > 0 : D(x, r_2) \subset T_2$. Alegem $r = \min\{r_1, r_2\}$ şi obţinem $D(x, r) \subset T_1 \cap T_2$.

3. Fie $\{T_i\}_{i \in I} \subset T$. Fie $x \in \cap T_i$. Rezultă că există $i_0 \in I : x \subset T_{i0}$.

Atunci avem că există $r > 0 : D(x, r) \subset T_{i0}$ şi deci $D(x, r) \subset \bigcup_{i \in I} T_i$.

Definiție. Fie (X, +, ·) un spațiu liniar. Se numeşte normă pe X o aplicație II·II : X→R cu proprietățile:

1. $\| x \| \geq 0 (\forall) x \in X$ şi $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|; (\forall) x \in X$;

3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|; (\forall) x, y \in X$

Ansamblul $(X \| \cdot \|)$ se numeşte spațiu normat.

Teorema. Fie $(X, \| \cdot \|)$ un spațiu normat. Atunci aplicația

$d : X \times X \to R_{+} d(x_1, x_2) = \| x_1 - x_2 \|$ este o distanță pe X, deci orice spațiu normat este un spațiu metric.

1.2.NOȚIUNI DE TOPOLOGIE

Demonstrație :

1. $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow \| x_1 - x_2 \| = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

2. $d(x_1, x_2) = \| x_1 - x_2 \| = \| -(x_1 - x_2) \| = \| x_2 - x_1 \| = d(x_2, x_1)$

3. $d(x_1, x_2) = \| x_1 - x_2 \| = \| (x_1 - x_3) + (x_3 - x_2) \| \leq \| x_1 - x_3 \| + \| x_3 - x_2 \|$
$= d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2).$

Observație. În particular, pe R aplicația $d(x_1, x_2) = I x_1 - x_2 I$ este o distanță, iar (R, d) este un spațiu metric. Topologia generată de această metrică este familia reuniunilor arbitrare de intervale deschise (a, b) din R şi este numită topologia euclidiană (uzuală sau naturală).

Definiție. Fie (X, +, ·) un spațiu liniar. Numim produs scalar o aplicație (·,·) : X × X → R care satisface :

1. $(x + y, z) - (x, z) + (y, z), (\forall) x, y, z \in X$;
2. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y), (\forall) \lambda \in R, (\forall) x, y \in X$;

3. $(x, y) = (y, x)$;
4. $(x, x) \geq 0, (\forall) x \in X$ şi $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ansamblul (X, (·,·)) se numeşte spațiu prehilbertian.

Teorema. (Inegalitatea Cauchy – Schwarz)

$$\left(x, y^2\right) \leq (x, x)(y, y), (\vee) x, y \in \mathrm{X}.$$

Demonstrație : Avem

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0, (\forall) x, y \in \mathrm{X}, (\forall) \lambda \in R$$

care este echivalent cu

$$\lambda^2 (y, y) + 2\lambda (x, y) + (x, x) \geq 0, (\forall) \lambda \in R$$

şi deci $\Delta \leq 0$ adică $(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0, (\forall) x, y \in \mathrm{X}.$

Teorema. Fie (X, (·,·)) un spaţiu prehilbertian. Atunci aplicația

$$\| \cdot \| : \mathrm{X} \to R \quad \| x \| = \sqrt{(x, x)}$$

Este o normă pe X şi deci orice spaţiu prehilbertian este un spaţiu normat.

Demonstrație : Cum $(x, x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathrm{X}$ aplicația din enunț este corect definită. Mai mult este evident că $\| x \| \geq 0, (\forall) x \in \mathrm{X}$ şi corect definită.

$$\| x \| = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Apoi

$$\| \lambda x \| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = I \ \lambda \ I \ \sqrt{(x, x)} = \| \lambda \| \ \| x \| .$$

În final

$$\| x \|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq (x, x) + 2\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} + (y, y) =$$

$$= \left(\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}\right)^2 = \left(\| .x. \| + \| .y. \|\right)^2$$

şi astfel || x + y || ≤ || x || + || y ||.

Observație. Pe spaţiul liniar R^n aplicația

$$(x, y) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + ... + x^n y^n$$

Este un produs scalar care generează norma euclidiană

$$\| \mathrm{x} \| = \sqrt{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + ... + \left(x^n\right)^2}$$

care la rândul ei generează distanța euclidiană

$$d(x, y) = \sqrt{\left(x^1 - y^1\right)^2 + \left(x^2 - y^2\right)^2 + ... + \left(x^n - y^n\right)^2}.$$

Vecinătăți

Definiție. Fie (X, T) un spaţiu topologic şi $x \in \mathrm{X}$. $V \subset \mathrm{X}$ se numeşte cevinătate pentru x dacă există T o mulțime deschisă astfel încât $x \in \mathrm{X} \subset V$ .Vom nota cu $\nu(x)$ mulțimea vecinătăților punctului x.

Observație. În cazul dreptei reale cu topologia euclidiană, orice mulțime V ce conține $x \in R$ şi pentru care există un interval deschis (a,b) inclus în V care îl conține pe x, este o vecinătate a lui x. Exemple de vecinătăți pentru X ar fi mulțimile de forma (x – e ,x + e) pentru orice e > 0.

Propoziția. Fie (X, T) un spațiu topologic şi T $\subset$X, T $\neq \phi$.

Mulțimea T este deschisă dacă şi numai dacă este vecinătatea pentru fiecare punct al său.

Demonstrație : Din definiția de mai sus este evident că orice mulțime deschisă este vecinătatea pentru fiecare punct al său. Reciproc, dacă $T \in \nu(x)$ pentru orice $x \in T$ atunci pentru fiecare $x \in T$ există $Tx \in \mathrm{T}$ astfel încât $x \in Tx \subset \mathrm{T}$. De aici rezultă $\mathrm{T} = \bigcup_{x \in \mathrm{T}} \mathrm{T}x$ şi deci T este deschisă fiind o reuniune de mulțimi deschise.

Definiție. Fie (X, T) un spațiu topologic si A $\subset \mathrm{X}_0$ mulțimea arbitrară.

Atunci definim :

1.interiorul lui A ca mulțimea acelor puncte $x \in \mathrm{X}$ pentru care A este o vecinătate a lui x, adică

$$^{0}\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{X} : (\exists) V \in \nu(x) : V \subset A\} \ ;$$

2. exteriorul lui A ca mulțimea acelor puncte $x \in \mathrm{X}$ care sunt puncte interioare pentru complementarea lui A, adică

$$\mathrm{E}xt\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{X} : (\exists) V \in \nu(x) : V \subset A\} \ ;$$

3. frontiera lui A ca mulțimea acelor puncte $x \in \mathrm{X}$ care nu sunt nici puncte interioare nici puncte exterioare pentru A, adică

$$Fr\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{X} : (\forall) V \in \nu(x) : V \cap \mathrm{A} \neq \phi, V \cap C\mathrm{A} \neq \phi\};$$

4. aderența lui A ca mulțime acelor puncte $x \in \mathrm{X}$ cu proprietatea că orice vecinătate a lui x conține puncte din A, adică

$$\bar{\mathrm{A}} = \{x \in \mathrm{X} : (\forall) V \in \nu(x) : V \cap \mathrm{A} \neq \phi\};$$

5. mulțimea punctelor de acumulare ale lui A ca mulțimea acelor puncte $x \in \mathrm{X}$ cu proprietatea că orice vecinătate a lui x conține puncte din A diferite de x, adică

$$\bar{\mathrm{A}} = \{x \in \mathrm{X} : (\forall) V \in \nu(x) : V \cap \mathrm{A} \setminus \{x\} \neq \phi\};$$

6. mulțimea punctelor izolate ale lui A ca mulțimea acelor puncte $x \in \mathrm{X}$ pentru care există o vecinătate V cu proprietatea $V \cap \mathrm{A} = \{x\}$, adică

$$\mathrm{Iz}A = \{x \in X : (\exists) V \in \nu(x) : V \cap A = \{x\}\ \}.$$

Observație. Din definiția precedentă rezultă imediat :

1. $\overset{o}{A} \subset A \subset \overline{A}$;

2. $\mathrm{E}xt\mathrm{A} = C\overset{o}{A}$;

3. $\overset{o}{A} \cup \mathrm{E}xt\mathrm{A} \cup Fr\mathrm{A} = X$;

4. $\overline{A} = A \cup Fr\mathrm{A} = A' \cup \mathrm{Iz}A$.

Propoziție. Fie (X, T) un spațiu topologic şi $A \subset X$.

Atunci :

1. A este deschisă dacă şi numai dacă $A = \overset{o}{A}$;

2. A este închisă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$;

Demonstrație :

1. Dacă A este deschisă din propoziție A este vecinătatea pentru fiecare punct al său şi deci $A \subset \overset{o}{A}$ cum incluziunea reciprocă este evidentă, avem că $A = \overset{0}{A}$ Reciproc, dacă $A = \overset{o}{A}$ atunci pentru fiecare $x \in \overset{o}{A}$ există o mulțime deschisă T_x cu proprietatea $x \in T_x \subset A$, de unde rezultă $\overset{o}{A} \subset \underset{x \in \overset{o}{A}}{\cup} T_x \subset A$, şi cum $A = \overset{0}{A}$ vom avea $A = \underset{x \in \overset{o}{A}}{\cup} T_x$ ceea ce conduce la faptul că A este deschisă fiind reuniune de mulțimi deschise.
2. A este închisă dacă şi numai dacă CA este deschisă, ceea ce este echivalent, în baza punctului precedent, cu $C^o A = C\mathrm{A}.$ Dacă $C^o A = C\overline{A}$.

Intr-adevăr

$$x \in c\overline{A} \Leftrightarrow (\exists) V \in \nu : V \cap A = \Leftrightarrow (\exists) V \in \nu(x) : V \subset CA \Leftrightarrow x \in \mathrm{E}_{xt}A = C^{\,o}\ A$$

Prin urmare A este închisă dacă si numai dacă $\overline{CA} = CA$, adică $\overline{A} = A$.

Şiruri în spații topologice

Definiție. Fie (X, T) un spațiu topologic. Se numeşte şir în X o aplicație $f : N \to X$.

Observație. Vom nota f (n) = x_n, şi în continuare, sperând că nici o confuzie nu este posibilă, vom identifica un şir prin valorile acestuia şi îl vom nota (x_n).

Definiție. Restricția unui şir (x_n) la orice parte infinită $N_0 \subset N$ se numeşte subşir al şirului (x_n).Dacă $N_0 = \{k_1, k_2, ..., k_n, ...\ \}$ vom utiliza notația (x_{kn}).

Definiție. Fie (x_n) un şir X. Vom spune că (x_n) este convergent dacă $(\exists)x \in \mathrm{X}$ astfel încât

$$(\forall)V \in \nu(x)(\exists)n_0 \in \mathrm{N} : x_n \in V(\forall)n \geq n_{0.}$$

$x \in \mathrm{X}$ se va numi limita şirului (x_n) şi vom scrie $\lim_{n \to \infty} x_n = x.$

Observație. Dacă X este un spațiu metric atunci un şir (x_n) este convergent la $x \in \mathrm{X}$ dacă

$$(\forall)e > 0(\exists)n_0 \in \mathrm{N} : d(x_n, x) < e(\forall)n \geq n_0$$

Dacă X este un spațiu normat atunci un şir (x_n) este convergent la $x \subset \mathrm{X}$ dacă

$$(\forall)e > 0(\exists)n_0 \in \mathrm{N} : IIx_n - xII < e(\forall n \geq n_0).$$

Definiție. Fie (X, d) un spațiu metric. Şirul (x_n) se numeşte şir fundamental (şir Cauchz) dacă

$$(\forall)e > 0(\exists)n_0 \in \mathrm{N} : d(x_n, x_m) < e(\forall)n, m \geq n_{0.}$$

Observație .In cazul unui spațiu normat condiția ca un şir (x_n) să fie un şir fundamental se va scrie

$$(\forall)e > 0(\exists)n_0 \in \mathrm{N} : IIx_n - x_m II < e(\forall)n, m \geq n_{0.}$$

Propoziție. Orice şir convergent în (X, d) este un şir fundamental

Definiție. Un spațiu metric se numeşte complet dacă orice şir fundamental este convergent.

Un spațiu prehilbertian complet se va numi spațiu Hilbert.

Un spațiu normat complet se numeşte spațiu Banach.

Teorema. R şi R^n sunt spații metrice complete.

1.3. Şiruri de numere reale

Generalități

În conformitate cu secțiunea precedentă, prin şir de numere reale vom înțelege o aplicație f : N → R şi îl vom nota (x_n).Vom spune că (x_n) este convergent dacă $(\exists)x \in R$ astfel încât :

$$(\forall)e > 0(\exists)n_0 \in N : Ix_n - xI < e(\forall)n \geq n_{0.}$$

Vom spune că x este limita şirului (x_n) şi notăm $x_n \to x.$ Un şir care nu este convergent se numeşte divergent.

Vom spune că un şir (x_n) tinde la infinit şi notăm $x_n \to \infty$ dacă :

$$(\forall)\mathrm{A}(\exists)n_0 : x_n > \mathrm{A}(\forall)n \geq n_{0.}$$

În mod analog $x_n \to -\infty$ dacă :

$$(\forall)\mathrm{A}(\exists)n_0 : x_n < \mathrm{A}(\forall)n \geq n_{0.}$$

Şirul (x_n) se numeşte şir fundamental sau şir Cauchy dacă :

$$(\forall)e>0(\exists)n_0\in \mathrm{N}: Ix_n-x_mI<e(\forall)n,m\geq n_{0.}$$

R este un spaţiu metric complet, adică un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.

Definiţie. Un şir (x_n) se numeşte crescător (resp. Strict crescător) dacă :

$$x_n\leq x_{n+1}(resp.x_n<x_{n+1}),(\forall)n\in \mathrm{N}.$$

Un şir (x_n) se numeşte descrescător (resp. descrescător) dacă :

$$x_n\geq x_{n+1}(resp.x_n>x_{n+1}),(\forall)n\in \mathrm{N}.$$

Un şir se numeşte monotom dacă este descrescător sau crescător.

Definiţie. Un şir (x_n) se numeşte majorat (resp. Minor) dacă :

$$(\exists)a\in R: x_n\leq a(resp.x_n\geq a)(\forall)n\in \mathrm{N}.$$

Un şir care este atât majorat cât şi minorat se numeşte mărginit.

Definiţie.Se numeşte punct limită a şirului (x_n) dacă există un subşir al lui (x_n) care are limita x.Vom nota cu $\alpha(x_n)$ mulţimea punctelor limită pentru (x_n).Numerele :

$$\overline{\lim} x_n=\sup\alpha(x_n)\underline{\lim} x_n=\inf\alpha(x_n)$$

Se numesc limita superioară (respectiv inferioară) a şirului (x_n).

Observaţie. (x_n) este convergent dacă si numai dacă $\alpha(x_n)=\{x\}$.

Teorema. Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Observaţie. Reciproc, dacă un şir este convergent rezultă ca este mărginit dar el nu este în mod necesar monoton.

Observaţie. In observaţia precedentă am notat că orice şir convergent este mărginit. Reciproc nu este însă adevărat.

Teoremă. Şirul (q^n) este convergent dacă şi numai dacă $-1<q\leq 1$şi

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}0 \ dac\breve{a} \ -1<q<1\\ 1 \ dac\breve{a} \ q=1\end{cases}$$

Pentru q > 1 avem $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty,$ iar pentru $q\leq -1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ nu există.

Teoremă. Dacă P şi Q sunt funcţii polinominale atunci :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\begin{cases}0 \ \text{dacă grad } P < \text{ grad } Q\\ \infty \ \text{dacă grad } R > \text{ grad } Q \text{ şi } a_0b_0 > 0\\ -\infty \ \text{dacă grad } R > \text{ grad } Q \text{ şi } a_0b_0 < 0\\ \dfrac{a_0}{b_0} \ \text{dacă grad } R = \text{ grad } Q\end{cases}$$

Unde a_0 *şi* b_0 reprezintă coeficienţii termenilor de grad maxim a polinoamelor P şi respectiv Q.

Teoremă. Şirul $(e_n)_{n\geq 1,}\, e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este stric crescător şi mărginit (deci convergent) şi limita acestui şir se notează e (constanta lui Euler e ≈ 2,71).

Propoziţie. Fie (x_n) un şir de numere reale.

1. Dacă există $x\in \ R$ *şi* (y_n) un şir de numere reale convergente la zero astfel încât

   $$I \ x_n - x \ I \leq y_n, (\forall) n\geq n_0$$

   Atunci (x_n) este convergent si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$;

2. mai general dacă există (y_n) şi (z_n) două şiruri de numere reale astfel încât :

   $$z_n \leq x_n \leq y_n, (\forall) n \geq n_0$$

   şi $\lim_{n\to\infty} y_n = x \ \lim_{n\to\infty} z_n = x, \ atunci \ \lim_{n\to\infty} x_n = x$;

3. dacă există (y_n) un şir de numere reale astfel încât :

   $$x_n \geq y_n, \ (\forall) n\geq n_0 \ şi \ \lim_{n\to\infty} y_n = \infty \ \ atunci \ \ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \ ;$$

4. dacă există (y_n) un şir de numere reale astfel încât :

   $$x_n \leq y_n, \ \ (\forall) n \geq n_0 \ şi \ \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty \ \ atunci \ \ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Şiruri recurente

Definiţie. Fie *f :* **R → R.** Vom numi şir recurent de ordin unu un şir (x_n) astfel încât x_{n+1} se exprimă în funcţie de x_n prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = f(x_n)$ şi a cărui valoare iniţială x_0 este cunoscută.

Teoremă. Dacă funcţia *f* este continuă şi şirul (x_n) este convergentă atunci limita sa l verifică ecuaţia *f (x)- x =0.*

Reciproc, dacă L este o soluţie a ecuaţiei *f (x)- x =0* şi funcţia *f* este derivabilă pe un interval $[l-a, l+a]$ ce conţine x_0 şi verifică.

$$\sup_{x\in[l-a,l+a]} |f'(x)| < 1$$

atunci şirul (x_n) converge la l.

Definiţie. Vom numi ecuaţia de recurenţă liniară de ordin p cu coeficienţi constanţi o relaţie

$$x_{n+p} - a_l x_{n+p-1} - a_2 x_{n+p-2} - .... - a_p x_n = g(n)$$

unde $a_1,....a_p$ sunt constante şi g este o funcţie reală dată.

O astfel de ecuaţie se va numi omogenă dacă g ≡ 0.

Propoziţie. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este suna dintre soluţia generală v_n a ecuaţiei omogene şi o soluţie particulară u_n^* a ecuaţiei neomogene.

In continuare vom restrânge discuţia la cazul şirurilor recurente liniare de ordinul întâi şi de ordin doi. Vom lăsa cititorului posibilitatea de generalizare.

Ecuaţii de recurenţă liniară de ordinul întâi.

Forma generală a acestor ecuaţii este :

$$x_{n+1} - ax_n = g(n), (a \in R^*.)$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate este :

$$v_n = Ca^n (C \in R).$$

Dacă găsim o soluţie particulară u_n^* pentru ecuaţia neomogenă soluţia ei generală va fi

$$x_n = u_n^* + Ca^{n.}$$

Constanta C se poate determina dacă este cunoscut primul termen al şirului, $x_{0.}$

Observaţie.Soluţia particulară u_n^* pentru ecuaţia neomogenă se determină în funcţie de forma funcţiei G. Dacă

$$g(n) = r^n P_k(n).$$

Unde $P_k(n)$ este un polinom de grad k atunci vom căuta u_n^* sub forma :

$u_n^* = r^n Q_k(n),$ dacă r ≠ a, unde $Q_k(n),$ este un polinom de grad k arbitrar ;

$u_n^* = nr^n Qk(n)$, daca r = a.

Propoziție. Caz particular Dacă g (n) = b (constantă reală) atunci:

$$1.\ x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a},\ \ dacă\ a \neq 1;$$

$$2.\ x_n = x_0 + b_n,\ \ dacă\ a = 1$$

Demonstrație .Intr-adevăr, cum suntem în cazul r = 1, $P_k(n) - b,$ vom avea situațiile :

1. a ≠ 1 (adică . a ≠ r).Atunci u_n^* = A (polinom de grad zero, adică constantă).El este o soluție particulară pentru ecuația neomogenă, deci

$$A - aA = b \Rightarrow A = \frac{b}{1-a} \Rightarrow x_n = Ca^n + \frac{b}{1-a}$$

Apoi $x_0 = C + \frac{b}{1-a} \Rightarrow C = x_0 - \frac{b}{1-a}$ şi astfel

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}$$

2. a = 1 (adică a = r). Atunci u_n^* = nA şi el verifică ecuația neomogenă deci :

$$(n+1)A - nA = b \Rightarrow A = b \Rightarrow x_n = C + nb.$$

Apoi $x_0 = C \Rightarrow x_n = x_0 + nb.$

Propoziție. (Caz particular) Dacă $g(n) = br^n$ atunci :

1. $x_n = \left(x_0 - \dfrac{b}{r-a}\right)a^n + \dfrac{b}{r-a} f^n, dacă\ \ a \neq r$;

2. $x_n = \left(x_0 + n\dfrac{b}{a}\right)a^n,\ \ dacă\ a\ = \ r$.

Demonstrație. Intr-adevăr, dacă a ≠ r atunci u_n^* = Ar^n este o soluție particulară pentru ecuația neomogenă, deci

$$\mathrm{A}r^{n+1} - a\mathrm{A}r^n = br^n \Rightarrow \mathrm{A} = \frac{b}{r-a} \Rightarrow x_n = Ca^n + \frac{b}{r-a}r^{n.}$$

Cum $x_0 = C + \dfrac{b}{r-a} \Rightarrow C = x_0 - \dfrac{b}{r-a},\ \ deci$

$$x_n = \left(x_o - \frac{b}{r-a}\right)a^n + \frac{b}{r-a}r^{n.}$$

Dacă a = r atunci $u_n^* = na^n$A şi cum el este soluția pentru ecuația neomogenă avem

$$(n+1)a^{n+1}A - na^{n+1}A = ba^n \Rightarrow A = \frac{b}{a} \Rightarrow x_n = Ca^n + na^{n-1}b.$$

Apoi x_0 = C, deci

$$x_n = x_0 a^n + nba^{n-1} = \left(x_0 + n\frac{B}{a}\right)a^{n.}$$

Ecuația de recurență liniară de ordin doi.

Forma generală a acestor ecuații este :

$$x_{n+2} - ax_{n+1} - bx_n = g(n).$$

Soluția generală a ecuației omogene asociate depinde de soluțiile r_1 şi r_2 ale ecuației caracteristice asociate :

$$r^2 - ar - b = 0\,.$$

(1) Dacă ecuația caracteristică are două rădăcini reale distincte r_1 şi r_2 atunci soluția ecuației omogene este :

$$v_n = C_1 r_1^n + C_1 r_2^n, C_1, C_2 \in R$$

(2) Dacă ecuația caracteristică are o rădăcină reală dublă r = a / 2

atunci soluția ecuației omogene este :

$$v_n = (C_1, C_2 n)(a/2)^n, C_1, C_2 \in R.$$

(3) Dacă ecuația caracteristică are rădăcinile complexe $r_{1,2}$ = p (cos θ ± i sin θ) atunci soluția ecuației omogene este :

$$v_n = p^n\,(\mathrm{C}_1 \cos n\theta + \mathrm{C}_2 \sin n\theta\,),\ \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2 \in \mathrm{R}.$$

Observație. Soluția particulară u_n^* pentru ecuația neomogenă se determină în funcție de forma funcției g. Spre exemplu :

1. Dacă g este un polinom de grad k atunci vom căuta soluția particulară u_n^* sub forma unui polinom de grad k dacă 1 nu este rădăcina a ecuației caracteristice.

   Dacă 1 este rădăcina simplă a ecuației caracteristice vom pune u_n^* = nQ_k(n), unde Q_k(n), este un polinom de grad k.

   Dacă 1 este rădăcina dublă a ecuației caracteristice vom pune u_n^* = n²Q_k(n), unde Q_k(n), este un polinom de grad k.

2. Mai general dacă g (n) = r^n P_k(n) vom pune u_n^* = n^p r^n Q (n),

unde p este ordinul de multiplicare a lui r în ecuația caracteristică (p = 0 dacă r nu este soluția a ecuației caracteristice) iar Q este un polinom de acelaşi grad ca şi P.

Serii numerice

Definiție .Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Vom putea considera atunci un nou şir şi anume $(s_n)_{n\geq 0}$, unde

$$s_n = a_0 + a_1 = a_2 + ... + a_n$$

Numit şirul sumelor parțiale asociat şirului $(a_n)_{n\geq 0}$.Perechea formată din şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(s_n)_{n\geq 0}$ se numeşte serie de termen general (a_n) şi se notează $\sum_{n-0}^{\infty} a_n$.O serie se numeşte convergentă dacă şirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\geq 0}$ este convergent. O serie care nu este convergentă se numeşte divergentă. In cazul în care o serie este convergentă se defineşte suma serie ca fiind $\lim_{n\to\infty} s_n$, acest număr fiind notat tot cu $\sum_{n-0}^{\infty} a_n$.

Propoziție. Fie $p \in R$. Seria $\sum_{n\geq 0} p^n$ se numeşte serie geometrică de rație p. Ea este convergentă dacă şi numai dacă $|p| < 1$ şi în acest caz suma serie este $\frac{1}{1-p}$.

Demonstrație. $s_n = 1 + p + p^2 + ... + p^n = \frac{1-p^{n+1}}{1-p}$ pentru p ≠ 1 şi atunci există $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-p}$ dacă şi numai dacă $|p| < 1$.Dacă p = 1 atunci $s_n = n+1$ şi deci seria este divergentă.

Criterii de convergență

Teoremă. (Criteriul necesar de convergență).

Fie $\sum_{n>0} a_n$ o serie de numere reale. Dacă $\sum_{n>0} a_n$ este convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstrație : Fie $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$. Atunci $a_n = s_n - s_{n-1.}$ Cum $\sum_{n>0} a_n$ este convergentă rezultă că există $\lim_{n\to\infty} s_n - s$ şi deci $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = s - s = 0$.

Teorema. (Criteriul general al lui Cauchz).

Fie $\sum_{n>0} a_n$ o serie de numere reale. $\sum_{n>0} a_n$ este convergentă dacă si numai dacă

$(\forall)e > 0(\exists)N \in N$ astfel încât :

$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < e, (\forall)n \geq N, (\forall)p \geq 1.$

Demonstrație : Şirul sumelor parțiale (s_n) este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchz, adică :

$$(\forall)e > 0(\exists)N \in N : |s_{n+p} - s_n| < e(\forall)n \geq N(\forall)p \geq 1.$$

$$\Leftrightarrow (\forall)e > 0(\exists)N \in N : |a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < e(\forall)n \geq N(\forall)p \geq 1.$$

Teoremă. Fie $\sum_{n>0} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. $\sum_{n>0} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parțiale (s_n) este mărginit.

Demonstrație. Dacă $\sum_{n>0} a_n$ este convergentă rezultă că (s_n) este convergent şi deci el este mărginit.

Reciproc, cum $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq$), avem că (s_n) este monotn şi cum el este mărginit din ipoteza el va fi convergent, deci $\sum_{n>0} a_n$ este convergentă.

Teoremă. (Criteriul de condensare) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir monoton descrescător de numere pozitive atunci $\sum_{n>0} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\sum_{n>0} 2^k a_{2^k}$ este convergentă.

Demonstrație : Ambele serii sunt serii cu termeni pozitivi. In baza teoremei precedente convergența lor este echivalentă cu mărginirea şirurilor sumelor parțiale. Fie

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + ... + 2^k a_{2^k}$$

aceste şiruri.

($\Rightarrow$) Pentru K dat alegem n astfel încât n > 2^k .Atunci :

$$s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + ... + (a_{2^{k-1}+1} + ... + a_{2^k}) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + ... + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k.$$

Dacă (s_n) este mărginit ca rezulta că (t_k) este mărginit.

($\Leftarrow$) Dat n alegem k : n $\leq 2^k$ .Atunci :

$s_n \le a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + ... + (a_{2^k} .... + a_{2^{k+1}-1}) \le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + ... + 2^k a_{2^k} = t_k$.

Cum (t_k) este mărginit rezultă (s_n) este mărginit.

Corolarul. Seria armonică generalizată $\sum\limits_{n\ge1} \frac{1}{n^p}$ este convergentă dacă şi numai dacă p > 1.

Demonstrație : Pentru p ≤ 0 avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \ne 0$ şi aplicând Criteriul necesar de convergență seria va fi divergentă.

Dacă p > 0, conform Criteriului de condensare, seria dată va avea aceeaşi natureă cu seria :

$$\sum_{k\ge0} 2^k \frac{1}{2^{hp}} = \sum_{k\ge0} \left(2^{1-p}\right)^k$$

Care este seria geometrică şi este convergentă dacă şi numai dacă $2^{1-p} < 1$ adică p > 1.

Teoremă. ***Criteriul I al comparației***.

Fie $\sum\limits_{n\ge0} a_n,\ \sum\limits_{n\ge0} b_n,$ două serii cu termani pozitivi. Presupunem că există N ∈N astfel încât $a_n \le b_n (\forall) n \ge N.$ Atunci :

1. $\sum\limits_{n\ge0} b_n,$ convergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n\ge0} a_n,$ este convergentă .
2. $\sum\limits_{n\ge0} a_n,$ este divergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n\ge0} b_n,$ este divergentă.

Demonstrație :

1. Putem presupunem că $a_n \le b_n (\forall) n \in N.$ (Neglijând primii N termeni din ambele serii nu se modifică natura acestora).Dacă $\sum\limits_{n\ge0} b_n,$ convergentă rezultă că şirul sumelor parțiale ale acestei serii este mărginit şi cum $a_n \le b_n$ vom avea că şirul sumelor parțiale ale seriei $\sum\limits_{n\ge0} a_n,$ este mărginit, deci această serie este convergentă.
2. Presupunem $\sum\limits_{n\ge0} b_n,$ convergentă. Rezultă, din punctul precedent, că seria $\sum\limits_{n\ge0} a_n,$ este convergentă, ceea ce este în contradicție cu ipoteza.

Teoremă .Criteriul al II-lea al comparației.

Fiind date seriile $\sum\limits_{n\ge0} a_n,\ \sum\limits_{n\ge0} b_n,\ a_n \ge 0,\ b_n > 0,$ dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0,\infty)$ atunci cele două serii au aceeaşi natură.

Demonstrație : Dacă :

$$\frac{a_n}{b_n} \to l \Rightarrow (\exists) N \in N : \left| \frac{a_n}{b_n} - l - \right| < \frac{l}{2}, (\forall) n \geq N$$

adică $\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3l}{2}, (\forall) n \geq N.$

Dacă presupunem acum că $\sum_{n\geq 0} b_{n,}$ este convergentă rezultă $\sum_{n\geq 0} \frac{3l}{2} b_{n,}$ este convergentă şi

aplicând Criteriul I al comparației, cum $a_n < \frac{3l}{2} b_n$, avem că $\sum_{n\geq 0} a_{n,}$ este convergentă.

Dacă presupunem că $\sum_{n\geq 0} b_{n,}$ este divergentă atunci $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2} b_{n,}$ este divergentă si Criteriul I al

comparației împreună cu inegalitatea $\frac{1}{2} b_n < a_n$ conduc la faptul că $\sum_{n\geq 0} a_{n,}$ este divergentă,

ceea ce încheie demonstrația.

Teoremă. Criteriul lui Abel.

Fie $\sum_{n\geq 0} a_{n,}$ o serie de numere reale având şirul sumelor parțiale mărginite. Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$

este un şir de numere reale monoton descrescător şi convergent la zero atunci $\sum_{n\geq 0} a_{n,} a_n$

este convergentă.

Demonstrație : Fie $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_{n.}$

Conform ipotezei $(\exists) M > 0 : \mid s_n \mid \leq M, (\forall) n \in N.$ Atunci :

$$\mid a_{n+1} a_{n+1} + ... + a_{n+p} a_{n+p} \mid =$$
$$= \mid a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + a_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + ... + a_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1}) \mid =$$
$$= \left| - a_{n+1} s_n + (a_{n+1} - a_{n+2}) s_{n+1} + ... + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) s_{n+p-1} + a_{n+p} s_{n+p} \right| \leq$$
$$\leq M \left(\left| - a_{n+1} \right| + \left| a_{n+1} - a_{n+2} \right| + ... + \left| a_{n+p-1} - a_{n+p} \right| + \left| a_{n+p} \right| \right) =$$
$$= M \left(a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + ... + a_{n+p-1} - a_{n+p} + a_{n=} + p \right) = 2 M a_{n+1.}$$

Fie acum e > 0.Cum $a_n \to 0$ rezultă că :

$$(\exists) N \in N : a_{n+1} < e / 2M, (\forall) n \geq N.$$

Revenind obținem :

$$\mid a_{n+1} a_{n+1} + ... + a_{n+p} a_{n+p} \mid < e, (\forall) n \geq N, (\forall) p \geq 1.$$

Criteriul general al lui Cauchz ne spune că seria $\sum_{n\geq 0} a_{n,} a_n$ este convergentă.

Teoremă. Criteriul lui Leibniz. Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere reale monoton descrescător şi convergent la zero atunci seria alternantă $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n-1} a_n$ este convergentă.

Demonstrație : Aplicăm Criteriul lui Abel cu $a_n = (-1)^{n-1}$ observând că $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ este 0 pentru *n* par şi *l* pentru *n* impar, deci este mărginit.

Definiție. O serie $\sum_{n\geq 0} a_{n,}$ se numeşte absolut convergentă dacă seria $\sum_{n\geq 0} | a_{n,} |$ este convergentă.

Teoremă. Criteriul rădăcinii al lui Cauchz.

Fie $\sum_{n\geq 0} a_{n,}$ o serie de numere reale. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ atunci :

1. dacă $l < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_{n,}$ este absolut convergentă;

2. dacă $l > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_{n,}$ este divergentă.

Demonstrație :

1. Daca $l < 1$ rezultă că există p : l < p < 1.Cum $\sqrt[n]{|a_n|} \to l$ obținem :

$$(\exists) N > 0 : (\forall) n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} < p \Rightarrow | a_n | < p^n$$

Utilizând Criteriul I al comparației, comparând cu seria geometrică, se obține că seria $\sum_{n\geq 0} | a_{n,} |$ este convergentă, deci $\sum_{n\geq 0} a_{n,}$ este absolut convergentă.

2. Dacă $l > 1$ rezultă că există r : l > r > 1. In mod analog aceasta va conduce la $| a_n | > r^n$.Dar $r^n \to \infty$ şi deci a_n nu tinde la zero. Criteriul necesar de convergență ne spune că $\sum_{n\geq 0} a_{n,}$ este divergentă.

Teoremă. Criteriul raportului al lui d'Alembert.

Fie $\sum_{n\geq 0} a_{n,}$ o serie de numere reale nenule astfel încât există $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$ atunci :

1. dacă $l < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_{n,}$ este absolut convergentă;

2. dacă $l > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_{n,}$ este divergentă.

Demonstrație :

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1 \Rightarrow (\exists)p : l < p < 1$ şi $(\exists)N > 0 : \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < p, (\forall)n \geq N.$ Deci

$$|a_{N+1}| < p|a_n|$$

$$|a_{N+2}| < p|a_{N+1}| < p^2|a_N|$$

Continuând raționamentul se obține :

$$|a_{N+p}| < p^p|a_N|$$

Aplicând acuma Criteriul I al comparației, comparând cu seria geometrică, se obține că $\sum\limits_{n\geq 0} a_{n,}$ este absolut convergentă.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l > 1 \Rightarrow (\exists)r : l > r > 1, (\exists)N > 0 : \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| >$ r, $(\forall)n \geq N.$ Ca şi mai sus

avem $|a_{N+p}| < r^p|a_N|$, deci, a_n nu tinde la zero şi din Criteriul necesar de

convergență va rezulta că $\sum\limits_{n\geq 0} a_{n,}$ este divergentă.

Aplicații economice

Matematici financiare

Problema 1. Dobânzi

O unitate plasează un capital de S_0 lei pe o durată de t ani. Dobânda anuală fiind notată cu r, unitatea va primi la sfârşitul contractului suma :

$$S = S_0(1 + rt) \text{ dacă dobânzile nu sunt cumulate;}$$

$$S1 = S_0(1 + r)^t \text{ dacă dobânzile sunt cumulate anual şi se capitalizează}$$

1.Evaluați diferența S1 - S (dacă rt < 1).

2.Anul este divizat în n perioade de aceeaşi durată. Dobând relativă la fiecare perioadă este presupusă proporțional cu durata perioadei.

(a) Calculați suma primită S_n dacă dobânzile sunt calculate la sfârşitul fiecărei perioade şi se capitalizează ;

(b) Arătați că S_n tinde crescător la o limită şi determinați această limită când n tinde la infinit.

Soluție.

1. $S_1 - S = S_0\left[(1+r)^t - (1+rt)\right] = S_0\left[\left(1 + \dfrac{t}{1}r + \dfrac{t(t-1)}{2}r^2 + r^2e(r)\right) - (1+rt)\right] \approx S_0 - S =$

$$= S_0 \frac{t(t-1)}{2} r^2, \text{ când } e(r) \to 0.$$

2. (a) Durata contractului este deci divizat în nt perioade. Dobânda relativă la fiecare perioadă este egală cu $\frac{r}{n}$.Deci $S_n = S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{tn}$.

   (b) $S_n = S_0 e^{tn\ \ln\left(1+\frac{r}{n}\right)}$.Funcția $f(x) = tx\ln\left(1+\frac{r}{x}\right)$ este crescătoare şi prin urmare

$S_{n+1} > S_n$.Pe de altă parte pentru x mare

$$\ln\left(1+\frac{r}{x}\right) \cong \frac{r}{x}, deci\ f(x) \to rt,\ \ astfel\ S_n \to S_0 e^{rt}.$$

Problema 2.

O sumă S este împrumutată cu o dobândă lunară i. Suma este rambursată în rate lunare. La sfârşitul lunii p debitorul plăteşte :

- o parte m_p din suma ;
- dobânda lunară pe suma nerambursată la începutul lunii p.

Să se determine m_p în funcție de S,i şi n astfel încât cele n vărsăminte lunare V_p să fie egale. Determinați apoi valoarea fiecărui vărsământ lunar cunoscând S,i şi n.

Soluție.

$$V_1 = m_1 + iS, V_2 = m_2 + i(S - m_1), V_3 = m_3 + i(S - m_1 - m_2)....$$

$$V_p = m_p + i(S - \sum_{k=1}^{p-1} m_k\ ), (\forall) p = 1,...., n.$$

Atunci

$$V_p = V_{p-1} \Leftrightarrow m_p + i(S - \sum_{k=1}^{p-1} m_k\ ) = m_{p-1} + i(S - \sum_{k=1}^{p-2} m_k\ ), \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_p - im_{p-1} \Leftrightarrow m_p = (1+i)m_{p-1} \Rightarrow m_p = (1+i)^{p-1} m_1.$$

Deci $S = \sum_{k=1}^{p-1} m_p = m_p = m_1 \sum_{p=1}^{n} (1+i)^{p-1} = m_1 \frac{(l+i)^n - 1}{(l+1)-1}$ de unde $m_1 = \frac{iS}{(1+i)^n - 1}$ şi

$$m_p = (1+i)^{p-1} \frac{iS}{(1+i)^n - 1}.$$

Apoi, $(\forall)p\ V_p = V_1 = m_1 + iS = \dfrac{iS}{(1+i)^n - 1} + iS = iS\dfrac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$.

Echilibru pe piață

Problema 1.

Cantitățile de cerere Qc_t şi de ofertă Qo_t, la data t (t $\in$ N), ale unui anumit bun variază în funcție de prețul său P_t după modelul :

$$Qc_t = \begin{cases} 5\ \textit{dacă}\ 0 \le P_t < \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{P_t} - 1\ \textit{dacă}\ \dfrac{1}{3} \le P_t < 2 \\ 0\ \textit{dacă}\ 2 \le P_t \end{cases}$$

$$Qo_t = \begin{cases} P_{t-1}\ \textit{dacă}\ 0 \le P_{t+1} < 2 \\ 2\ \textit{dacă}\ 2 \le P_{t+1} \end{cases}$$

1.Să se scrie ecuația de recurență verificată de P_t atunci când piața este în echilibru ;

2. (a) Arătați ca şirul (P_t) nu poate admite decât două limite l_1 şi l_1;

(b) Puneți $u_t{}'\dfrac{P_t + l_1}{P_t + l_2}$ şi rezolvați ecuația de recurență verificată de şirul (u_t);

(c) Deduceți că piața admite un preț de echilibru independent de $P_0 \in R_+^*$.

Soluție.

1. Dacă $P_0 \in (0,2)$ atunci $Qo_1 = P_0$ este diferit de 0 şi 5, deci avem echilibru

   $Qc_1 = Qo_1 \ = \dfrac{2}{P_1} - 1$ şi astfel $P_1 \in [1/3,2)$. Atunci $Qo_2 = P_1$ este diferit de 0 şi de 5 şi

   vom avea echilibrul $Qc_1 = Qo_1 \ = \dfrac{2}{P_1} - 1$ şi $P_2 \subset [1/3,2)$. Prin inducție vom avea

   $P_t \in [1/3,2)$. şi condiția de echilibru devine $P_{t-1} = \dfrac{2}{P_t} - 1$.

Dacă $P_0 \in [2,\infty)$. atunci $Qo_1 = 2$ este diferit de 0 şi 5 şi vom avea echilibru

$Qc_1 = Qo_1 \ = \dfrac{2}{P_1} - 1$ şi astfel $P_1 \in [1/3,2)$. Analog ca şi mai sus se obține condiția de echilibru

$P_{t-1} = \dfrac{2}{P_t} - 1$.

In toate cazurile P_t verifică ecuația de recurență :

$$P_{t-1} = \frac{2}{P_{t-1}+1}, (\forall) t > 2.$$

2.

3. (a) Limita l posibilă va verifica ecuația $l = \frac{2}{l+1}$ şi astfel $l_1 = l$ sau $l_2 = -2$.

(b) $$u_t = \frac{P_t - 1}{P_t + 2} = \frac{\frac{2}{P_{t-1+1}} - 1}{\frac{2}{P_{t-1+1}} + 2} = \frac{2 - P_{t-1} - 1}{2 + 2P_{t-1} + 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1 - P_{t-1}}{2 + P_{t-1}}\right] = -\frac{1}{2}u_{t-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^t u_0$$

(c) Când $t \to \infty, u_t \to 0, deci\ P_t \to 1.$

Problema 2.

Cantitățile de cerere Qc_t şi de ofertă Qo_t la momentul t, ale unui anumit bun variază în funcție de prețul său P_t după modelul

$$Qc_t = a - bP_t$$

$$Qo_t = c + dP_{t-1}$$

Unde a, b, d $\in R_+^*$, iar c$\in R_-^*$. Să se studieze echilibru acestei piețe.

Soluție : La echilibru $Qc_t = Qo_t$ deci

$$a - bP_t = c + dP_{t-1} \Leftrightarrow bP_t + dP_{t-1} = a - c \Leftrightarrow P_t - \left(-\frac{d}{b}\right)P_{t-1} = \frac{a-c}{b}$$

Aplicând Cazul particular obținem

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\frac{a-c}{b}}{1+\frac{d}{b}}\right)\left(-\frac{d}{b}\right)^n + \frac{\frac{a-c}{b}}{1+\frac{d}{b}} = \left(P_0 - \frac{a-c}{b+d}\right)\left(-\frac{d}{b}\right)^n + \frac{a-c}{b+d}$$

Atunci pentru d < b piața admite un preț de echilibru egal cu $\frac{a-c}{b+d}$, independent de P_0.

Capitolul 2. *Aplicații ale derivatelor*

Preliminarii

Funcție reală.Definiție

Definiție.Se numeşte funcție reală de o variabilă reală o aplicație între două mulțimi (numite domeniul de definiție şi domeniul de valori) care pot fi mulțimea **R** a numerelor reale sau submulțimi ale lui **R**.

Pentru o funcție de la **R** la **R** vom utiliza notația

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$
$$x\to f(x)$$

f(x) este numit imaginea lui *x* prin funcția *f.*

Domeniul de definiție

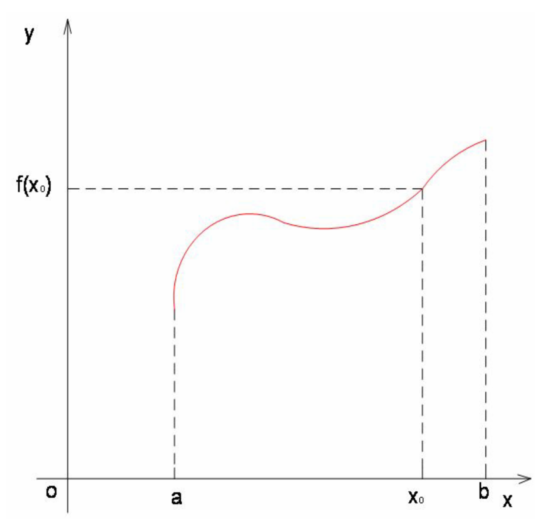
Vom nota cu **D** mulțimea numerelor reale ce au o imagine prin aplicația *f* adică mulțimea acelor numere *x* pentru care *f(x)*se poate calcula.

Graficul unei funcții

Fie f: D$\subset R\to R$

$$x\to y=f(x)$$

Pentru a construi graficul funcției f vom considera un sistem de axe rectangulare în plan. Pentru fiecare $x_0\in D$ cuplul ($x_0, f(x_0)$ poate fi reprezentat de un punct P_0 de coordonate x_0 şi $f(x_0)$.Ansamblul de puncte P_0 este numit graficul funcției f si se reprezintă printr-o curbă **P**.



Compunerea şi inversarea funcţiilor

Fie f : A→B, g : B→C două funcţii astfel încât domeniul de valori a lui f să coincidă cu domeniul de definiţie a lui g. Atunci se poate considera funcţia compusă $h=g\circ f$: A→C h(x) →$g(f(x_0))$, $(\forall)x\in A$.

Definiţia Fie f : A→B

1. f se numeşte injectivă dacă $f_{(x_1)}=f_{(x_2)}\Rightarrow x_1=x_2$;
2. f se numeşte surjectivă dacă $(\forall)y\in B(\exists)x\in A: f(x)=y$;
3. f se numeşte bijectivă dacă este injectivă şi surjectivă.

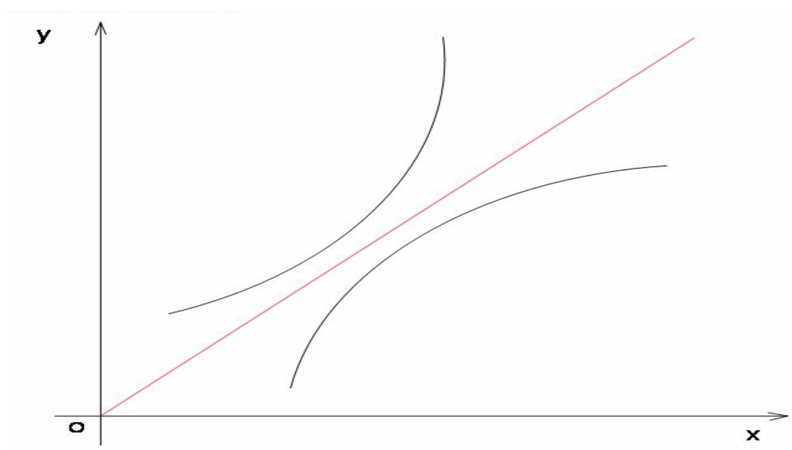
Definiţia Fie f : A→B o funcţie bijectivă. Vom putea defini inversa lui f,ca fiind acea funcţie $f^{-1}:B\to A$ definită prin : $f^{-1}(y)$ este egal cu acel unic x cu proprietatea :

f(x) = y,adică

$$\left[f\circ f^{-1}\right](y)=y \qquad (\forall)y\in B$$

$$\left[f^{-1}\circ f\right](x)=x \qquad (\forall)x\in A$$

Observaţia. Graficele funcţiilor f şi f^{-1} sunt simetrice în raport cu prima bisectoare.



Funcţii monotone şi funcţii mărginite

Definiţie. Fie f : D→R. Funcţia f se numeşte :

1. monoton crescătoare pe D dacă $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$
2. strict crescătoare pe D dacă $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
3. monoton descrescător pe D dacă $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$
4. strict descrescător pe D dacă $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
5. monotonă dacă este monoton crescătoare sau monoton descrescătoare
6. strict monotonă dacă este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

Definiția. O funcție f : D→**R** se numeşte:

1. mărginită superior dacă $(\forall)M \in R: f(x) \le M (\forall)x \in D$;
2. mărginită inferior dacă $(\forall)m \in R: f(x) \ge m(\forall)x \in D$;
3. mărginită dacă este atât mărginită superior cât şi mărginită inferior.

Funcții periodice

Definiția f : **R**→ **R** se numeşte periodică de perioadă T ≠ 0 dacă *f(x+T)=f(x)* $(\forall)x \in D$.

Observația $(\forall)n \in N^*$ nT este perioadă pentru f. Dacă există o cea mai mică perioadă strict pozitivă aceasta se numeşte perioada principală. Va fi prin urmare suficient ca studiul lui f să fie făcut pe un interval de lungime cât perioada principală.

Funcții pare, funcții impare

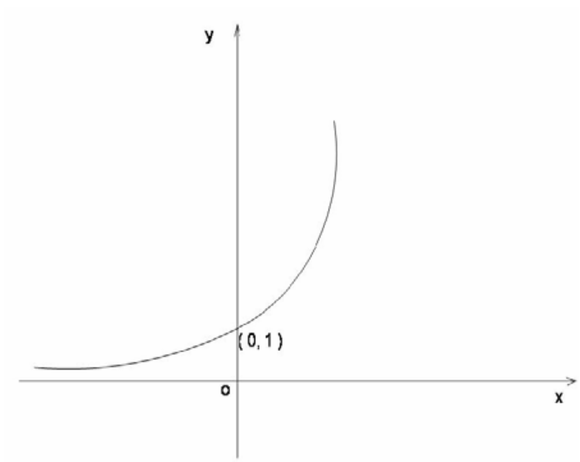
Definiția f :**R**→**R** se numeşte pară dacă *f(x)=f(-x)*

f :**R**→**R** se numeşte impară dacă *f(x)=-f(-x)*

Funcții uzuale

Funcția exponențială

f : **R**→(0,∞) $f(x)=e^x$

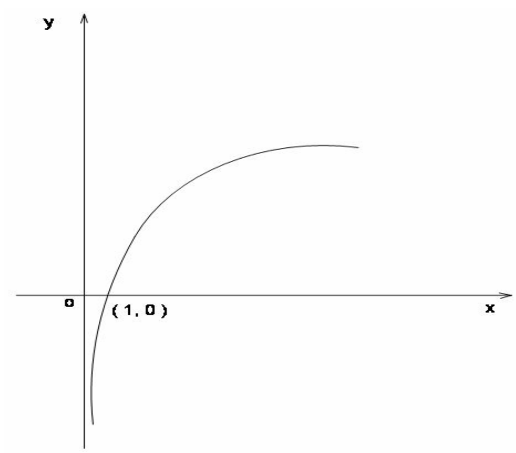


Funcția exponențială este strict crescătoare, bijectivă, nemărginită. Să mai notăm că $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ şi $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ (limita unei funcții va fi studiată în secțiunile următoare).

Funcția logaritmică

Funcția exponențială fiind bijectivă va fi inversabilă şi inversa ei va fi numită funcția logaritmică.

ln : (0,∞)→**R**



Această funcție este strict crescătoare,nemărginită,

$$\lim_{x\to\infty}\ln x=-\infty \ ; \ \lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$$

Din faptul că funcția exponențială este inverse funcției logaritmice avem:

$$e^{\ln x}=x \ ; \ \ln e^{x}=x$$

Din proprietățile funcției logaritmice reținem:

$$\ln ab=\ln a+\ln b$$

$$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$$

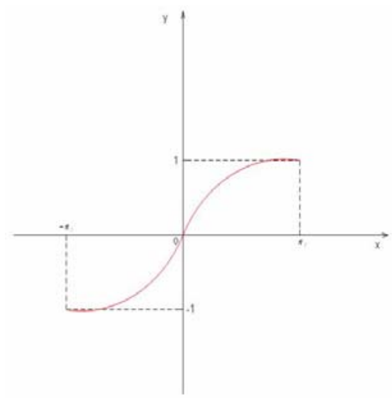
$$\ln a^{b}=b\ln a$$

Observația. Dacă a > 0 , a ≠ 1 se poate defini funcția exponențială în baza a, f : **R**→(0, ∞) $f(x)=a^{x}$ unde $a^{x}=e^{x\ln a}$.Inversa acestei funcții va fi $\log_{a}:(0,\infty)\to R$.

Funcția sinus

sin : **R**→ **R** este mărginită, având valori cuprinse între -1 şi 1, este periodică de perioadă principală 2π .

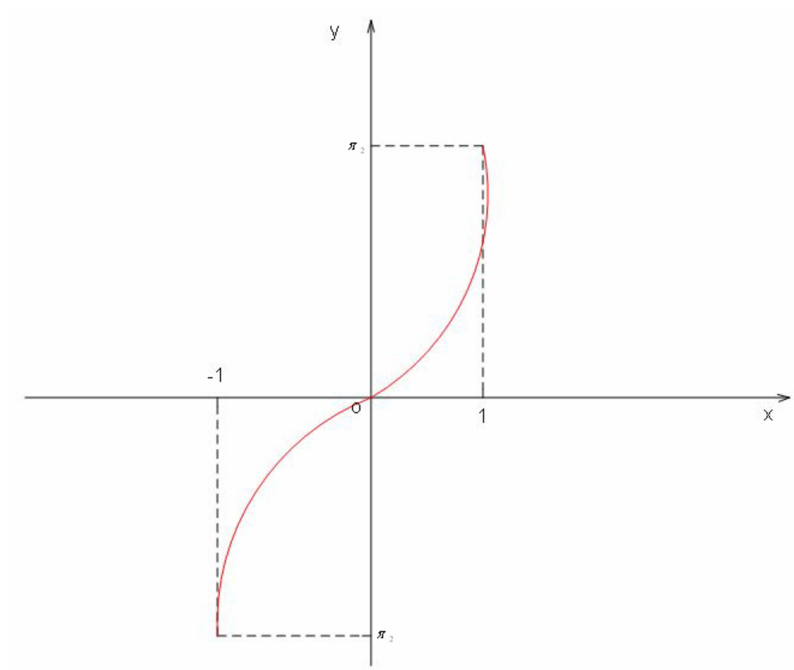
Considerând sin : $\left[-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]\to\left[-1\ ,\ 1\right]$ se obține o funcție bijectivă.



Funcția arcsinus

Funcția arcsinus este inversa funcției sinus.

$$\arcsin : [-1 , 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Din faptul că arcsinus este inverse funcției sinus avem

$$\sin(\arcsin x) = x \ ; \ \arcsin(\sin x) = x.$$

Observația Funcția cosinus nu necesită un studio aparte deoarece $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Observația La fel funcția arccos : [-1 , 1]→[0 , π] nu necesită un studiu aparte deoarece:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

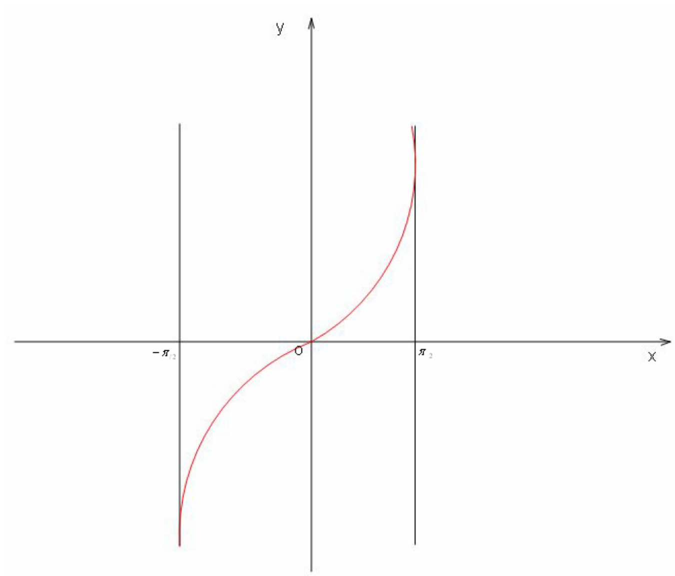
Funcția tangentă

$$tg : D \to \mathbf{R} \quad tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$D = \mathbf{R} \setminus \{x : \cos x = 0\} = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \;\; ; \;\; k \in Z \right\}$$

Funcția tangentă este periodică de perioadă principală π şi este nemărginit.

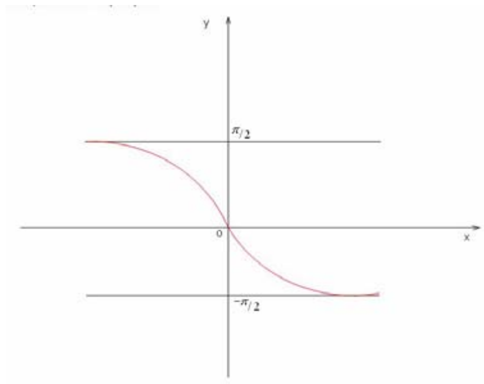
Funcția tg : $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$ este strict crescătoare,nemărginită şi bijectivă.



Funcția arctangentă

Funcția arctangentă este inversa funcției tangente.

arctg : R→(-π/2, π/2)



Funcția arctangentă este strict crescătoare,mărginită şi:

$$\lim_{x\to\infty} arctg\ x = \frac{\pi}{2}\ ;\ \lim_{x\to -\infty} arctg\ x = \frac{\pi}{2}$$

Observația Funcțiile *ctg* şi *arctg* nu necesită un studio aparte deoarece:

$$ctg\, x = tg\,(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$arcctg\, x = \frac{\pi}{2} - arctg\ x$$

Limită şi continuitate

Limita unei funcții într-un punct

Considerăm mulțimea $\overline{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$.

Vom numi interval deschis în $\overline{R}$ mulțimile de forma:

$$(a,b) = \{\ x \in \overline{R}\ :\ a < x < b\ \}\ ;$$

$$(a,\infty] = \{\ x \in \overline{R}\ :\ a < x \le \infty\ \}\ ;$$

$$[-\infty,a) = \{\ x \in \overline{R}\ :\ -\infty \le x < a\ \}$$

unde a,b$\in \overline{R}$,a<b.

Prin vecinătate (în $\overline{R}$) a unui punct $x \in \overline{R}$ se înțelege orice mulțime V$\subset \overline{R}$ cu proprietatea că include un interval deschis ce conține punctual *x*. În conformitate cu prima secțiune a capitolului precedent vom defini mulțimile deschise în $\overline{R}$ ca fiind acele mulțimi ce sunt vecinătăți pentru fiecare punct al lor. $\overline{R}$ devine astfel un spațiu topologic numit dreapta reală încheiată iar topologia construită va fi numită topologia dreptei încheiate.

Definiția Fie f : D$\subset$**R**→ **R** şi $a \in D'$ (punct de acumulare pentru D în $\overline{R}$).Se spune că funcția f are limita $l \in \overline{R}$ în punctual a dacă:

$(\forall)\ V \in \mathcal{V}(l)\ (\exists)\ U \in \mathcal{V}(a)\ :\ (\forall)\ x \in D \cap U \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V$.

şi vom scrie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Observaţia 1. În cazul $a, l \in \mathbf{R}$ definiţia de mai sus este echivalentă cu :

$$(\forall)\ e > 0\ (\exists)\ \delta > 0\ :\ (\forall)\ x \in D\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < e\ ;$$

2. Dacă $a = \infty, l \in \mathbf{R}$ definiţia de mai sus devine :

$$(\forall)\ e > 0\ (\exists)\ M > 0\ :\ (\forall)\ x \in D\ x > M\ \Rightarrow |f(x) - l| < e\ ;$$

3. Dacă $a \in \mathbf{R}$, $l = \infty$ funcţia f are limita l în punctual a dacă şi numai dacă :

$$(\forall)\ M > 0\ (\exists)\ \delta > 0\ :\ (\forall)\ x \in D\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M\ ;$$

4. Dacă $l = \infty$, $a = \infty$ funcţia f are limita l în punctual a dacă :

$$(\forall)\ M > 0\ (\exists)\ M' > 0\ :\ (\forall)\ x \in D\ x > M' \Rightarrow f(x) > M\ ;$$

5. Definiţia se va putea scrie într-un mod similar când $a = -\infty$ sau $l = -\infty$.

Teorema (Heine)

Funcţia f : $D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are limita $l \in \overline{R}$ în $a \in D'$ dacă şi numai dacă :

$$(\forall)(x_n)\ (x_n) \subset D - \{a\}\ x_n \to a \Rightarrow f(x) \to l\ .$$

Exemplu. Să se arate că $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ nu există.

Soluţie : $f(x) = \sin x$

Alegem $x_n = n\pi \to \infty \quad f(x_n) = 0 \to 0$

Mai alegem $y_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \to \infty \quad f(y_n) = 1 \to 1$

Rezultă că funcţia f nu are limite în punctul $a = \infty$.

Definiţia. Fie $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi a un punct de acumulare pentru A = $\{x \in D\ :\ x < a\}$.Se spune că funcţia f are limită la stânga în punctul a egală cu l_s dacă restricţia lui f la A,$f\big|_A$,are limită l_s în punctul a.

Vom scrie : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l_s$ care uneori va fi notată şi $f(a - 0)$.

În mod analog se va defini limita la dreapta a unei funcţii într-un punct,notată :

$$l_d = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a + 0).$$

Teorema. Fie f : D$\subset$**R**$\to$**R** , a$\in D'$ cu proprietatea că *f* are limite laterale în punctul a.Atunci următoarele afirmații sunt echivalente :

1. f are limită în punctul a ;
2. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$

Mai mult în acest caz avem:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x).$$

Exemplu. Pentru ce valori ale lui *k* funcția *f* : **R**$\to$**R**

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-kx+1 & dacă \quad x<3 \\ 3x-8 & dacă \quad x\geq 3 \end{cases}$$

are limită în punctul $x = 3$.

Soluție :

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x).$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)\left(2x^2-kx+1\right)=18-3k+1=19-3k$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)(3x-8)=9-8=1\Rightarrow 19-3k=1\Leftrightarrow k=6.$$

Propoziția. Fie P şi Q două funcții poliomiale. Vom nota cu a_0 şi b_0 coeficienții termenilor de grad maxim din P respectiv Q şi vom nota cu $l = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.Avem:

1. Dacă grad P < grad Q atunci $l = 0$;
2. Dacă grad P = grad Q atunci $l = \dfrac{a_0}{b_0}$;
3. Dacă grad P > grad Q şi $a_0 b_0 > 0$ atunci $l = \infty$;
4. Dacă grad P > grad Q şi $a_0 b_0 < 0$ atunci $l = -\infty$.

Propoziția

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Continuitatea funcției de o singură variabilă

Definiție. Fie f : $D\subset R\to R, a\in D$.Funcția f se numeşte continuă în punctul a dacă :

$$(\forall)\ V\in V(f(a))\ \ (\exists)U\in V(a)\quad :\quad (\forall)x\in D\cap U\Rightarrow f(x)\in V$$

Observație. Această definiție se poate scrie în următoarea formă echivalentă :

$$(\forall)e>0(\exists)\delta>0\ \ :\ \ (\forall)x\in D\ \ :\ \ |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<e$$

Observație. 1. Dacă a$\in I_z D$ atunci f este evident continuă în a.

2. Dacă $a\in D\cap D'$ atunci f este continuă în a dacă $(\exists)\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Teorema (Heine). Fie f : $D\subset R\to R, a\in D$.Funcția f este continuă în a dacă şi numai dacă :

$$(\forall)(x_n)\ \ (x_n)\subset D\ x_n\to a\Rightarrow f(x_n)\to f(a).$$

Teorema (Weierstrass). Dacă *f : [a,b]*→**R** este continuă atunci *ca* este mărginită şi îşi atinge marginile.

Definiție. Fie *f : [a,b]*→**R**. Se spune că *f* are proprietatea lui Darboux pe *[a,b]* dacă pentru orice punct $x_1<x_2$ din *[a,b]* şi oricare ar fi *y* situate între $f(x_1)$ *şi* $f(x_2)$ există cel puțin un punct $x\in(x_1,x_2)$ astfel încât *f(x) = y.*

Teoremă. Orice funcție continuă pe un inteval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Asimptote

Definiție. Fie f : D→**R**. Dacă $(\exists)a\in D'$ astfel încât $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)$ este egală cu $+\infty$ *sau* $-\infty$ atunci vom spune că dreapta $x = a$ este asimptotă verticală la stânga pentru *f.*

În mod analog dacă $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)$ este egală cu $+\infty$ *sau* $-\infty$ vom spune că dreapta $x = a$ este asimptota verticală la dreapta pentru *f.*

Definiție. Fie f : D→**R**. Dacă $\infty\in D'$ şi există $\lim_{x\to\infty}f(x)=l\in R$,atunci vom spune că dreapta $y = l$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ a lui *f*. În mod similar dacă $-\infty\in D'$ şi $(\exists)\lim_{x\to-\infty}f(x)=l\in R$ vom spune că dreapta $y = l$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ pentru *f.*

Definiție. Fie f : D→**R** , $\infty \subset D'$ .Dacă există $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = m \in R^*$ *și* $(\exists)\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = n \in R$

atunci dreapta y = mx + n se numeşte asimptotă oblică spre $+\infty$.

În mod analog se va defini asimptotă oblică spre $-\infty$.

Funcții derivabile

Definiție. Fie f : D$\subset R \to R, x_0 \in D \cap D'$.Se spune că funcția *f* este derivabilă în punctul x_0 dacă există şi este finită limita

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Această limită se notează $f'(x_0)$ şi este numită derivate funcției f în punctual x_0.

Observație. Uneori se utilizează notațiile : $\Delta r = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ şi atunci

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Dacă *y = f(x)* vom folosi şi notațiile :

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}.$$

Tabel de derivate

1. $(C')=0$, C constantă reală ;
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$, a constantă reală , $x \in (0,\infty)$ cel puțin:
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, a > 0 , a $\neq$ 1 , x > 0 în particular $(\ln x)' \frac{1}{x}$.
4. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0, a \neq 1, x \in R$ în particular $(e^x)' = e^x$.
5. $(\sin x)' = \cos x$, $x \in R$
6. $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in R$
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\cos x \neq 0$
8. $(ctgx)' = \frac{1}{\sin^2 x}$, $\sin x \neq 0$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$

11. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$

12. $(arcctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$

Observație. Formula *(2)* în cazul în care $a = l$ ne va da $(x)' = 1$ valabilă pentru $x \in R$.

Formula *(2)* poate fi folosită la derivarea unor radicali,dacă mai notăm faptul că

$\sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$.Spre exemplu : $\left(\sqrt{x}\right)' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Reguli de derivare

Teoremă. Dacă funcțiile *f,g : I*→**R** (*I* interval din **R**) sunt derivabile pe *I* atunci funcțiile *f+g ,* *f-g ,* $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (dacă *g(x)≠0* , $x \in I$) sunt derivabile pe *I* şi :

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(f-g)' = f' - g'$
3. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
4. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Observație. Un caz particular al formulei *(3)* este cazul în care g este o funcție constantă *g – C*. Atunci vom avea $(Cf)' = C \cdot f'$.

Derivarea funcțiilor compuse

Teoremă. Dacă funcția *u : I→J* este derivabilă pe *I* şi funcția *f : J*→**R** este derivabilă pe *J* atunci funcția $f \circ u : I \to R$ este derivabilă pe *I* şi

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Diferențiala unei funcții

Definiție. Fie *f* : $D \subset R \to R$ *şi* $x_0 \in D \cap D'$. Dacă *f* este derivabilă în x_0 atunci vom numi diferențiala funcției f în x_0 aplicația liniară notată $d_{x0}f$ definită prin :

$$d_{x0}f \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

$$\left(d_{x0}f\right)h = f^{'}\left(x_0\right)\cdot h\,.$$

Observație. Convenim ca diferențiala funcției f în punctual x să o scriem ca produsul dintre aplicația dx (diferențiala aplicației identitatea) şi numărul real $f^{'}(x)$ .Astfel :

$$df = f^{'}(x)\,dx$$

ceea ce justifică într-un fel şi notația :

$$f^{'}\left(x\right) = \frac{df}{dx}$$

Teoremă (Teorema lui Rolle). Dacă f : [a,b]→**R** este continuă pe [a,b],derivabilă pe (a,b) şi $f(a) = f(b)$ atunci $\left(\exists\right)e \in \left(a,b\right)$ astfel încât $f^{'}$(e) = 0.

Teoremă (Teorema creşterilor finite a lui Lagrange).

Dacă f : [a,b]→**R** este continuă pe [a,b] şi derivabilă pe (a,b) atunci $\left(\exists\right)e \in \left(a,b\right)$ astfel încât :

$$f\left(b\right) - f\left(a\right) = \left(b-a\right)f^{'}\left(e\right)$$

Coloral (Consecințe ale teoremei lui Lagrange)

1. Singurele funcții cu derivată nulă pe un interval sunt constantele ;
2. Dacă $f^{'} > 0$, ($f^{'} < 0$) atunci f este monoton crescătoare (respective monoton descrescătoare) pe intervalul I:
3. Dacă f este continuă pe intervalul I , derivabilă pe $I - \left\{x_0\right\}$ şi $\left(\exists\right)\lim\limits_{x\to x_0} f^{'}\left(x\right)$ atunci $\left(\exists\right)f^{'}\left(x_0\right) - \lim\limits_{x\to x_0} f^{'}\left(x\right)$.

Teoremă (Teorema de medie a lui Cauchy)

Fie f,g : $[a,b]$→**R** , continue pe $[a,b]$,derivabile pe (a,b) şi $g^{'}\left(x\right) \neq 0, \left(\forall\right)x \in \left(a,b\right)$. Atunci $\left(\exists\right)c \in \left(a,b\right)$ astfel încât :

$$\frac{f\left(b\right) - f\left(a\right)}{g\left(b\right) - g\left(a\right)} = \frac{f^{'}\left(c\right)}{g^{'}\left(c\right)}$$

Teoremă (Regulile lui L'Hopital)

Fie f,g : (a,b)→**R** $\left(-\infty \leq a < b \leq \infty\right)$ derivabile,cu $g^{'}\left(x\right) \neq 0, \left(\forall\right)x \in \left(a,b\right)$ cu proprietatea că $\left(\exists\right)\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{'}\left(x\right)}{g^{'}\left(x\right)} = l$. Atunci :

1. Dacă $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to a} g\left(x\right) = 0$ atunci $\left(\exists\right)\lim\limits_{x\to a}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = l$

2. Dacă $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ atunci $(\exists)\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Derivate de ordin superior

Definiție. Fie f : D$\subset R\to R$ şi $x_0\in D\cap D^{'}$.Dacă $(\exists)V\in V(x_0)$ astfel încât f derivabilă pe V şi $f^{'}$ este derivabilă în x_0 atunci vom spune că funcția f este derivabilă de două ori în x_0.În acest caz derivate lui $f^{'}$ în x_0 va fi notată $f^{''}(x_0)$ sau $f^{(2)}(x_0)$ şi este numită derivate de ordinal doi a funcției f în punctul x_0.

Prin inducție se defineşte derivate de ordin *n.*

Definiție. O funcție *f : I*→**R** (*I* interval) se numeşte convexă pe *I* dacă $(\forall)x_1,x_2\in I,(\forall)\ t\in[0,1]$ avem

$$f[(1-t)x_1+tx_2]\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$$

Funcția *f* se numeşte concavă pe intervalul *I* dacă funcția *–f* este convexă pe *I.*

Teoremă. Fie *f* : *I*→**R** (*I*$\subset R$ interval) derivabilă de două ori pe *I*. Atunci :

1. *f* este convexă dacă şi numai dacă $f^{''}(x)>0$, $(\forall)x\in \mathring{I}$

2. *f* este concavă dacă şi numai dacă $f^{''}(x)<0$, $(\forall)x\in \mathring{I}$

Definiție. Fie *f* : *I*→**R** continuă. Un punct $x\in\mathring{I}$ se numeşte punct de inflexiune pentru *f* dacă $(\exists)(a,b)\subset I,x_0\in(a,b)$ astfel încât *f* să fie convexă pe (a,x_0) şi concavă pe (x_0,b) sau invers.

Formula lui Taylor şi aplicații

Formula lui Taylor

O funcție $f:D\subset R\to R$ se numeşte de clasă $C^{''}$ pe D notăm $f\in C^{''}(D)$ dacă este derivabilă până la ordinal *n* inclusive şi f^{n} este continuă pe D.

Fie f : [*a,b*]→**R** , $f\in C^{''}[a,b]$;I exist[$f^{(n+1)}$ pe (a,b).

Să considerăm numărul *A* definit de egalitatea :

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f^{'}(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f^{''}(a)+.......+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{n}(a)+(b-a)^pA\,.$$

unde $p\in N^{*},p\le n+1$

Fie *F : [a,b]*→**R**

$$F^{'}(x)=f(x)+\frac{b-x}{1!}f^{'}(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f^{''}(x)+.......+\frac{(b-x)^n}{n!}f^{n}(x)+(b-x)^pA\,.$$

Observăm că F este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) şi $F(b) = F(a)$.

Aplicând teorema lui Rolle obținem că există $c \in (a,b)$ astfel încât

$F^{'}(c) = 0.$ Dar

$$F^{'}(x) = f^{'}(x) - f^{'}(x) + \frac{b-x}{1!} f^{''}(x) - \frac{2(b-x)}{2!} f^{''}(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f^{'''}(x) + ... - \frac{n(b-x)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x)$$
$$+ \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) - p(b-x)^{p-1} A \; .$$

Atunci

$$F^{'}(c) = 0 \Rightarrow \frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) = p(b-c)^{p-1} A \; .$$

de unde

$$A = \frac{(b-c)^{n-p+1}}{p \cdot n!} - f^{(n+1)}(c)$$

Revenind în egalitatea care îl defineşte pe A obținem :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f^{'}(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f^{''}(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{n}(a) + \frac{(b-c)^{n-p+1}(b-a)^p}{p \cdot n!} - f^{(n+1)}(c)$$

numită formula lui Taylor de ordin n. Ea se mai poate scrie :

Teoremă (Formula lui Tylor) Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă de n + 1 ori într-un punct

$x_0 \in \overset{\circ}{I}$ .Atunci :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

unde

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f^{'}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{''}(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{n}(x_0)$$

numit polinomul lui Taylor de grad n ataşat funcției f în punctual x_0 şi

$$R_n(x) = \frac{(x-c)^{n-p+1}(x-x_0)^p}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(c)$$

numit restul lui Taylor de ordin n unde C este situate între x şi x_0.

Observație. Dacă $p = 1$ obținem restul lui Cauchy :

$$R_n(x) = \frac{(x-c)^n (x-x_0)}{n!} f^{(n+1)}(c)$$

iar pentru $p = n + 1$ se obține restul lui Lagrange :

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Formula lui Mac Laurin

Un caz particular al formulei lui Taylor este cazul în care se ia $x_0 = 0$ obținându-se formula lui Mac Laurin .

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f^{'}(0) + \frac{x^2}{2!} f^{''}(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

unde *c* este situate între *0* şi *x*.

Propoziția. Avem următoarele dezvoltări :

1. $e^x - 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)} e^x \;:\; c \in (0, x)$

2. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cdot \sin(c + (k+1)\pi) \;:\; c \in (0, x)$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \cos\left(c + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \;:\; c \in (0, x)$

4. $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ..... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \;:\; c \in (0, x)$

Demonstrație :

1. Dacă $f(x) = e^x \Rightarrow f^{'}(x) = e^x$ şi prin inducție se obține $f^{(n)}(x) - e^x$.

Atunci $f(0) = 1, f^{'}(0) = 1, ..., f^{n}(0) - 1$. Rezultă

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^x$$

unde *c* este situate între *0* şi *x*.

2. Dacă $f(x) = \sin x \Rightarrow f^{'}(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Atunci $f^{''}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

Prin inducție se obține $f^{n}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$. Prin urmare

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} 0 & n=4k \\ 1 & n=4k+1 \\ 0 & n=4k+2 \\ -1 & n=4k+3 \end{cases}$$

de unde dezvoltarea dorită.

3. Dacă $f(x)=\cos(x)$ atunci $f^{'}(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ şi prin inducție

$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ Atunci :

$$f^{(n)}(0)-\begin{cases} 1 \ dacă \ n=4k \\ 0 \ dacă \ n=4k+1 \\ -1 \ dacă \ n=4k+2 \\ 0 \ dacă \ n=4k+3 \end{cases}$$

de unde rezultă dezvoltarea dorită.

4. Am văzut că dacă $f(x)=\ln(x+1)$ atunci prin inducție se

obține $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{(x+1)^n}$ şi de aici $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)\ !$ de unde dezvoltarea dorită.

Extreme locale.

Definiție. Fie $f:I\to R, x_0\in\overset{\circ}{I}$ .Punctul x_0 se numeşte punct de maxim local pentru *f* dacă :

$$(\exists)V\in V(x_0) \quad : \quad f(x)\leq f(x_0) \quad (\forall)x\in V$$

Punctul x_0 se numeşte punct de minim local pentru *f* dacă :

$$(\exists)V\in V(x_0) \quad : \quad f(x)\geq f(x_0) \quad (\forall)x\in V$$

Teorema. (Fermat) Dacă $f:I\to R$ este derivabilă în punctual de extreme local $x_0\in\overset{\circ}{I}$ atunci $f^{'}(x_0)=0$.

Teoremă. Dacă $f:I\to R$ este derivabilă pe $(n+1)$ ori în punctual $x_0\in\overset{\circ}{I}$ şi $f^{'}(x_0)=0, f^{''}(x_0)=0, ...f^{(n+1)}(x_0)=0, f^{n}(x_0)\neq 0$ atunci :

1. $n-2m$ *şi* $f^{(n)}(x_0)<0\Rightarrow x_0$ este punct de maxim local ;
2. $n=2m$ *şi* $f^{(n)}(x_0)>0\Rightarrow x_0$ este punct de minim local ;

3. $n = 2m + 1 \Rightarrow x_0$ nu este punct de extreme local.

Demonstrație. Conform formulei lui Taylor avem :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} [f^{(n)}(x_0) + \frac{x - x_0}{n+1} f^{(n+1)}(c)]$$

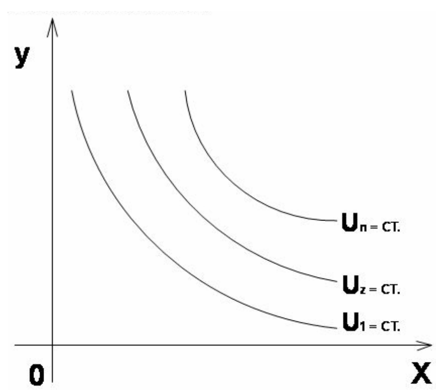
Dar pentru x suficient de aproape de x_0 această ultimă paranteză are semnul lui $f^{(n)}(x_0)$.Astfel x_0 va fi punct de extreme local dacă si numai dacă n este par (când $(x - x_0)^n$ păstrează semn constant pe o vecinătate a lui x_0),caz în care avem : dacă $f^{(n)}(x_0)$>0 atunci $f(x) - f(x_0) \geq 0$ pe o vecinătate a lui x_0 şi deci x_0 este punct de minim local ; dacă $f^{(n)}(x_0)$<0 atunci $f(x) - f(x_0) \leq 0$ pe o vecinătate a lui x_0 şi deci x_0 este punct de maxim local.

Aplicații economice

Rata marginală de substituție

Fără a expune teoria unui consumator,vom spune simplu că ea este fondată pe interpretarea alegerilor unui individ presupus rațional.

Vom reprezenta grafic anumite curbe de indiferență,adică totalitatea combinațiilor de două produse A şi B care îi oferă consumatorului acelaşi nivel de satisfacție (deci aceeaşi utilitate agregată).

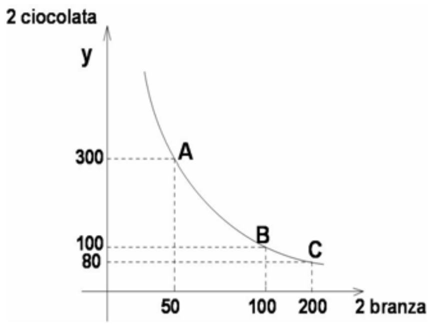


Spre exemplu vom da mai jos curba de indiferență ce descrie totalitatea combinațiilor de două produse,ciocolată şi brânză,judecate echivalent de un consumator.

De exemplu consumatorul este indiferent la două coşuri :

$$\text{coşul } A:\begin{cases} 300g \ ciocolată \\ 50g \ brânză \end{cases} \qquad \text{coşul } B:\begin{cases} 100g \ ciocolată \\ 100g \ brânză \end{cases}$$

Când trece de la coşul A la coşul B consumatorul rămâne pe aceiaşi curbă de indiferență dar operează o anumită substituție între cele două bunuri



Astfel când trece de la A la B el consumă cu 200g mai puțină ciocolată şi cu 50g mai multă brânză.

Vom defini atunci rata de substituție între bunurile ciocolată şi brânză ca raportul între cantitatea de bun cedat (ciocolată) şi cantitatea de bun obținut (brânză).

Însă dorim să definim această rată ca o cantitate pozitivă şi cum una din cantități creşte iar alta scade vom mai pune un minus în fața acestui raport. Astfel :

$$\text{Rata de substituție } = -\frac{\Delta q_{bunului\ cedat}}{\Delta q_{bunului\ obtinut}}$$

În cazul nostru avem Rata de substituție $=\frac{300-100}{100-50}=4$.

Dacă considerăm şi coşul $C:\begin{cases} 80g \ ciocolată \\ 200g \ brânză \end{cases}$

Rata de substituție când trecem de la B la C va fi : $\frac{100-80}{200-100}=0{,}2$.

Vom introduce o rată de substituție instantanee numită rata marginală de substituție.(RMS)

$$\text{RMS} = \lim_{\Delta q_{bun\ obtinut}\to 0} -\frac{\Delta q_{bun\ cedat}}{\Delta q_{bun\ obtinut}}$$

Astfel pe o curbă de indiferență RMS într-un punct dat va fi derivate în acel punct a funcției $q_{bun\ cedat}$ = f($q_{bun\ obtinut}$) luată cu semnul minus.

$$\text{RMS} = -\frac{dq_{bun\ cedat}}{dq_{bun\ obtinut}}$$

Astfel în cazul a două produse A,B în cantități x,y rata marginală de substituție va fi :

$$\mathrm{RMS} = -\frac{dy}{dx}$$

Observație. În construcția unor curbe de indiferență se ține cont de un număr de criterii numite „axiome de comportament”.

Să menționăm totuşi anumite caracteristici comune :

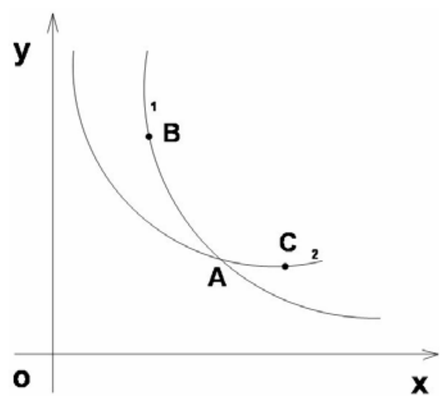
Propoziția. Curbele de indiferență sunt descrescătoare.

Demonstrație. Presupunem că ar exista un segment [AB] crescător.

Aceasta ar însemna că în punctul B cantitățile obținute din cele două bunuri ar fi mai mari ca şi în punctul A ceea ce ar fi în contradicție cu definiția curbei de indiferență.

Propoziție. Două curbe de indiferență nu se pot intersecta.

Demonstrație. Vom demonstra că dacă două curbe de indiferență T_1 şi T_2 au un punct comun atunci ele coincide.



Presupunem deci că : $(\forall)A \in T_1 \cap T_2$ .Fie $B \in T_1, C \in T_2$ două puncte fixate dar arbitrare.

Atunci A,B$\in T_1$ implică în cele două puncte consumatorul are acelaşi nivel de satisfacție.

Apoi A,C$\in T_2$ conduce la faptul că în cele două puncte consumatorul are acelaşi nivel de satisfacție. Va rezulta atunci că în B şi C consumatorul are acelaşi nivel de satisfacție şi atunci B şi C ar fi pe aceeaşi curbă de indiferență deci : $T_1 = T_2$.

Propoziție. Curba de indiferență este convexă.

Demonstrația acestei propoziții va fi făcută în ultimul capitol,fiind necesară derivarea funcțiilor de mai multe variabile.

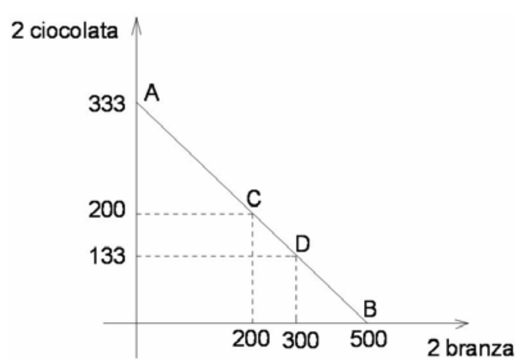
Observație. Dacă părăsim domeniul consumatorului pentru cel al producătorului,întâlnim în analiza microeconomică funcții de producție ce depind doar de doi factori de producție: munca L şi capitalul K. Funcția de producție va fi :

$$Q = f(K,L)$$

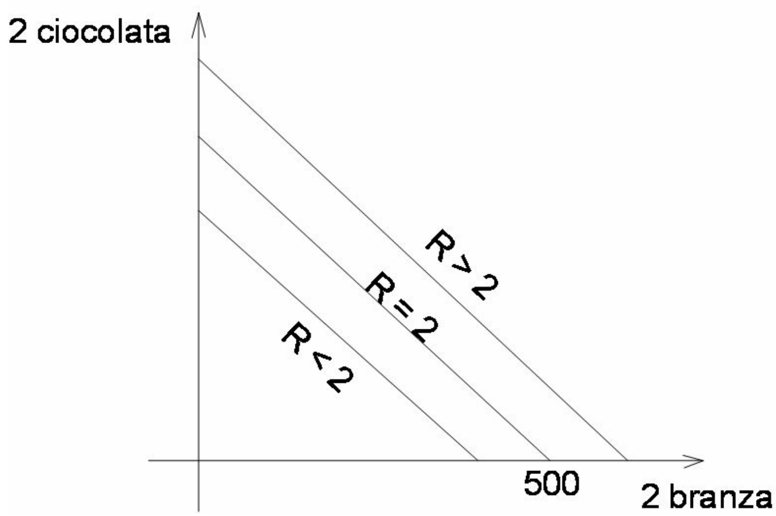
Analogul curbelor de indiferență vor fi curbele de isoproducție adică totalitatea combinațiilor de cei doi factori ai producției L şi K care asigură acelaşi nivel al producției.
Se introduce şi aici indicatorul rata marginală de substituție cu un conținut perfect similar cu cel folosit în analiza comportamentului consumatorului.

***Panta unei drepte de buget. Panta unei drepte de izocost*.**

Curba de indiferență pe care am cunoscut-o în prima subsecțiune este locul acelor puncte indiferente pentru un consumator,adică care îi produc aceeaşi satisfacție.
Dar dacă din punct de vedere a satisfacției consumatorului apreciază atât (300g ciocolată,50g brânză) cât (80g ciocolată,200g brânză) el nu este sigur că va putea să-şi procure două coşuri.Totul depinde de prețul fiecărui produs şi de suma de bani (bugetul) de care dispune.
Cum se reprezintă grafic o curbă de buget , adică constrângerile monetare la care trebuie să facă față consumatorul?
Vom presupune că individual nostrum dispune de un buget de 2 u.m. iar prețurile acestor bunuri sunt P ciocolată = 6 u.m./kg şi P brânză = 4 u.m./kg. Dacă el decide să cheltuiască tot pe ciocolată va putea obține 333g (punctul A).În mod analog dacă îşi va utiliza tot bugetul pentru a cumpăra brânză va obține 500g (punctul B).Cu acelaşi buget consumatorul va putea cumpăra 200g brânză,200g ciocolată (punctul C) sau 300g brânză,133g ciocolată (punctul D).
Observăm că punctele A,B,C,D se aliniază.



Ele determină dreapta de buget adică locul coşurilor financiare posibile dacă ținem cont de prețurile bunurilor şi bugetul alocat.
Este clar că dacă dispunem de un alt buget vom obține o altă dreaptă de buget (paralelă cu prima atât timp cât prețurile nu se schimbă).Un buget mai mare va corespunde la o dreaptă „mai sus” iar un buget mai mic la o dreaptă „mai jos”.



Pe de altă parte observăm că în fiecare punct al acestei drepte raportul dintre cantitatea cedată (ciocolată) şi cantitatea obţinută (brânză) este constant.

Pentru 67g ciocolată mai puţin va cumpăra 100g brânză deci un raport $\frac{67}{100}$.

$$\text{Deci : } \left|\frac{\Delta q_{ciocolată}}{\Delta q_{brânză}}\right| = \frac{67}{100} = \frac{P_{brânză}}{P_{ciocolată}} = \frac{4}{6} = 0{,}67$$

Mai general dacă avem două bunuri A şi B şi notăm cu x cantitatea consumată din bunul A şi cu y cantitatea consumată din bunul B iar cu P_A şi P_B vom nota preţurile celor două bunuri şi cu R bugetul alocat,ecuaţia dreptei de buget va fi :

$$R = P_A \cdot x + P_B \cdot y$$

Pentru a găsi panta acestei drepte o vom scrie sub formula :

$$y = \frac{P_A}{P_B} x + \frac{R}{P_B}$$

Obţinem că panta acestei drepte este $-\frac{P_A}{P_B}$,adică derivate lui y în raport cu x.

$$\frac{d_y}{d_x} = -\frac{P_A}{P_B}$$

Astfel valoarea absolută a pantei unei drepte de buget este egală cu raportul preţurilor P_A / P_B :

$$\left|\frac{d_y}{d_x}\right| = \left|\frac{P_A}{P_B}\right|.$$

Să părăsim acum domeniul consumatorului pentru cel al producătorului.

O societate dispune de o anumită sumă de bani ce este repartizată la diferiți factori de producție. Pentru a simplifica considerăm doar 2 factori de producție : capitalul şi munca utilizată respectiv cantitățile K şi L a căror prețuri sunt P_K şi P_L .În mod analog cu dreapta de buget vom avea o dreaptă ce corespunde la cheltuielile de achiziție ale cantităților K şi L.

$$C_x = P_K \cdot K + P_L \cdot L$$

Această dreaptă este numită dreapta de cost total sau izocost căci ea ne arată cum putem pentru acelaşi cost global să facem diferite combinații de K şi L. În mod a

$$K = \frac{P_L}{P_K} \cdot L + \frac{C_T}{P_K} = f(L)$$

de unde :

$$\frac{dK}{dL} = f^{'}(L) = -\frac{P_L}{P_K}$$

deci :

$$\left|\frac{dK}{dL}\right| = \frac{P_L}{P_K}.$$

Un exemplu economic de funcție derivată : costul marginal

Aşa cum am văzut, dacă avem o funcție $f : D \subset R \to R$ derivabilă, valoarea funcției derivate $f^{'}(x)$ se defineşte prin expresia :

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dacă notăm $y = f(x)$, variabilei y îi corespunde variația $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ atunci când variabila x a suferit o variație Δx .

Formula de mai sus va fi scrisă :

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

La o societate comercială, costul total al unui produs C este funcție de volumul producției Q, funcția C = f(Q) numindu-se funcția de cost total.

Creşterii ΔQ a cantității de produs îi corespunde o creştere a costului

$\Delta C = f(Q + \Delta Q) - f(Q)$.

Dacă suntem interesați de modificarea costului la o variație a cantității vom studia funcția de cost marginal C_{mg} definită ca limita raportului dintre variația costului ΔC corespunzătoare unei variații ΔQ a cantității şi ΔQ, când $\Delta Q \to 0$

$$C_{mg} = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q}$$

adică tocmai derivata funcției C = f(Q)

$$C_{mg} = \frac{dC}{dQ} = f^{'}(Q).$$

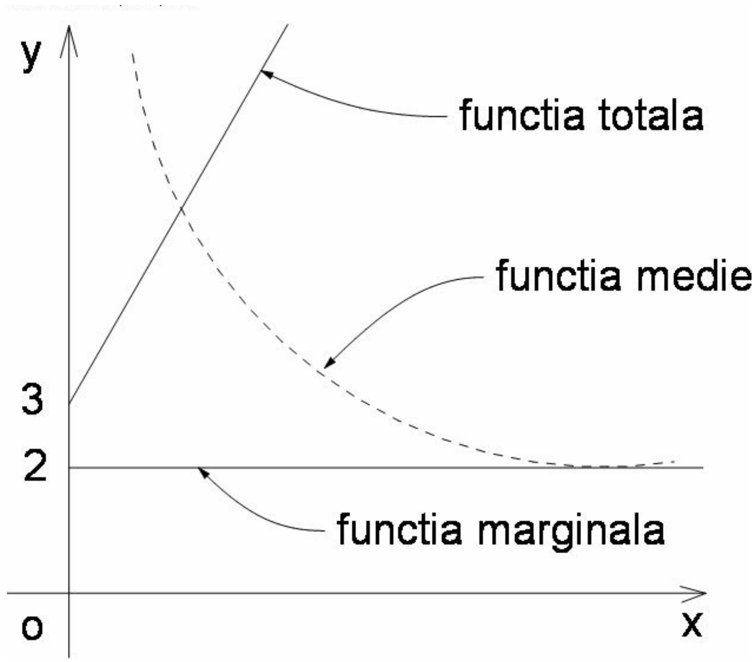
Dacă însă suntem interesați de costul pe unitate de produs, adică costul unitary mediu, numit prescurtat costul mediu, vom studia funcția :

$$C_{Me} = \frac{C}{Q}.$$

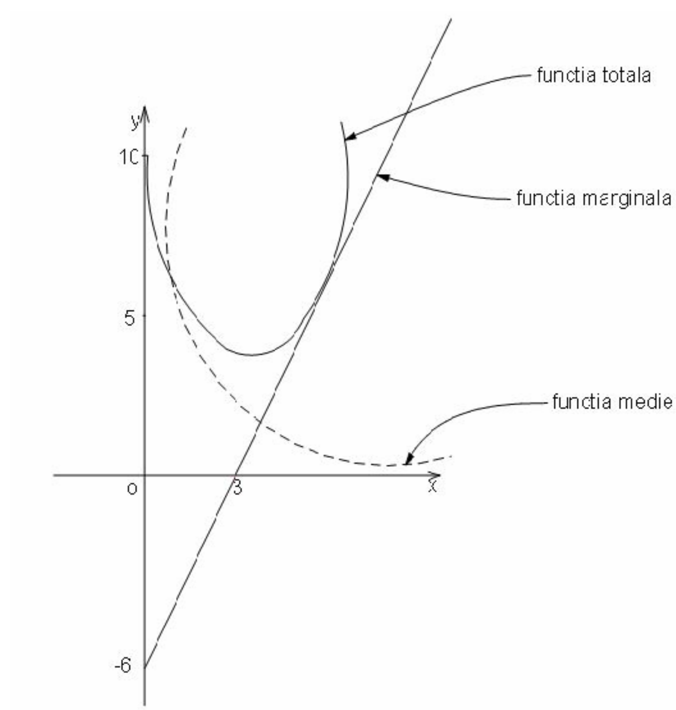
Observație. În general dacă Y este o mărime economică (cost total, încasări totale, …) funcție de o variabilă x, Y = f(x), numită funcție totală, unde f este derivabilă, vom putea defini funcția marginală (valoarea marginală) $Y_{mg} = f^{'}(x)$ ca viteza de variație a variabilei dependente Y în raport cu variabila independentă x. Vom mai defini funcția medie (valoarea medie) : $Y_{Me} = \dfrac{f(x)}{x}$.

Reprezentări grafice ale funcției totale, funcției medii şi funcției marginale

1. $$\begin{cases} Y = f(x) = 2x + 3 \quad (functia\ totală) \\ Y_{Me} = \dfrac{f(x)}{x} = 2 + \dfrac{3}{x} \quad (functia\ medie) \\ Y_{mg} = f^{'}(x) = 2 \quad (functia\ m\arg inală) \end{cases}$$



2. $$\begin{cases} Y = f(x) = x^2 - 6x + 10 & (\textit{functia totală}) \\ Y_{Me} = \dfrac{f(x)}{x} = x - 6 + \dfrac{10}{x} & (\textit{functia medie}) \\ Y_{mg} = f^{'}(x) = 2x - 6 & (\textit{functia marginală}) \end{cases}$$



Elasticitatea cererii în raport cu prețul

Presupunem că cunoaştem funcția de cerere a unui consumator, adică funcția care exprimă legătura între cantitatea cerută „q" şi prețul „p" a unui bun.

Dorim să definim un indicator care să traducă sensibilitatea cererii la variații ale prețului.

Raportul $\frac{\Delta q}{\Delta p}$ constituie un prim răspuns care exprimă variația cererii la o variație a prețului.

Avem însă o problemă de unități. Δq se exprimă în unități fizice (litri, kilometric etc) şi Δp se exprimă în unități monetare (Lei, Euro etc).Vom căuta atunci un indicator fără dimensiuni.

Vom numi rata de variație (creştere) a variabilei x raportul $\frac{\Delta x}{x}$.

Vom defini atunci coeficientul elasticității cererii q a unui bun în raport cu prețul său p.

$$E_c = -\frac{\Delta q / q}{\Delta p / p}$$

Semnul minus a fost pus pentru a avea un coeficient al elasticității cererii pozitiv, asta datorită faptului că o creştere a prețului $(\Delta p > 0)$ va conduce la o scădere a cererii $(\Delta q < 0)$.

Interpretarea elasticității de cerere va fi : "cu cât variază în procente cantitatea cerută de un anumit bun când prețul său se modifică cu un procent?"

Dacă dorim să calculăm elasticitatea într-un punct al curbei cererii, adică pentru o creştere „foarte mică" a prețului, vom trece la limită în relația de mai sus şi obținem :

$$E = \lim_{\Delta p \to 0} -\frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = -\frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Vom mai scrie :

$$E = -\frac{dp}{dq} \cdot \frac{p}{q} = -\frac{\frac{dq}{dp}}{\frac{q}{p}} = -\frac{functia\ m\arg inala}{functia\ medie}.$$

Uneori preferăm să scriem :

$$E = \left| \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} \right|$$

Să notăm că :

a) Dacă E = 0 atunci chiar dacă prețul variază cererea nu variază. Un astfel de bun se numeşte perfect inelastic.

b) Dacă 0<E<1 atunci o creştere a prețului de 10% spre exemplu va fi însoțită de o variație a cererii de maxim 10%.Bunul se numeşte inelastic.

c) Dacă E = 1 atunci variațiile prețului şi ale cererii sunt egale în procente.

d) Dacă E>1 atunci variația relativă a cantității este superioară variației relative a prețului. Bunul se numeşte elastic.

e) Dacă E→∞ atunci o variată infimă a prețului antrenează o variație gigantică a cantității. Bunul se numeşte perfect elastic.

Elasticitatea ofertei în raport cu prețul

Noțiunea de elasticitate a unei funcții y = f(x) într-un punct x este o noțiune generală pe care o putem introduce şi în cazul funcției oferite.

Elasticitatea ofertei în raport cu prețul permite să găsim cum variază oferta în raport cu variațiile relative ale prețului. Ea va fi definită într-o manieră analogă cu elasticitatea cererii prin :

$$E = \left| \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} \right|$$

q fiind de această dată cantitatea oferită.

Legea normală a lui Gauss-Laplace

În statistică vom întâlni o lege de distribuție foarte importantă cunoscută sub numele de legea lui Laplace de către francezi (Laplace fiind francez), legea lui Gauss de către germani (Gauss fiind german) şi legea normală de către anglo-americani.

Fără a intra în explicații statistice vom prezenta această funcție, graficul ei fiind bine cunoscut datorită curburii „în clopot".

Expresia funcției este :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

unde m şi σ sunt două constante reale, σ>0.

I. Domeniul de definiție. Cum funcția exponențială este definită şi continuă pe R funcția f va fi definită şi continuă pe R.

II. Limitele la $+\infty$ şi $-\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

Astfel graficul are asimtotă orizontală y = 0 spre $+\infty$ şi $-\infty$.

III. Derivata

$$f^{'}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} - \frac{-(x-m)}{\sigma^2}$$

Observăm că pentru x > m afem $f^{'}(x) < 0$ şi pentru x < m avem $f^{'}(x) > 0$.Astfel :

$$f^{'}(x) = -f(x)\cdot\frac{(x-m)}{\sigma^2} \Rightarrow f^{''}(x) = -f^{'}(x)\cdot\frac{x-m}{\sigma^2} - f(x)\cdot\frac{1}{\sigma^2} =$$

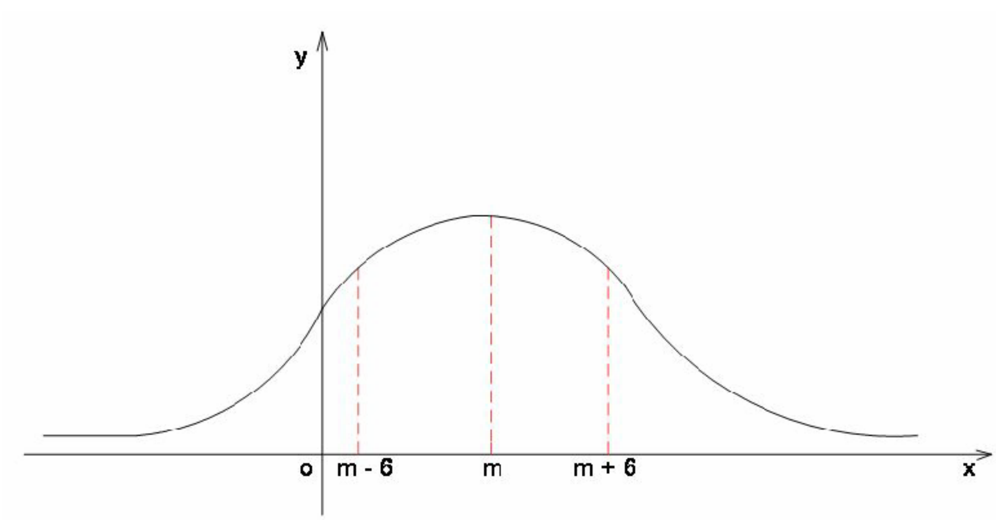
$$= f(x)\cdot\frac{(x-m)^2}{\sigma^2} - f(x)\cdot\frac{1}{\sigma^2} = \frac{f(x)}{\sigma^4}\left[(x-m)^2 - \sigma^2\right] = \frac{f(x)}{\sigma^4}\left[(x-m-\sigma)(x-m+\sigma)\right]$$

Rezultă că derivata a doua se anulează şi îşi schimbă semnul în $x_1 = m+\sigma$; $x = m-\sigma$.

IV. Tabel de variaţie.

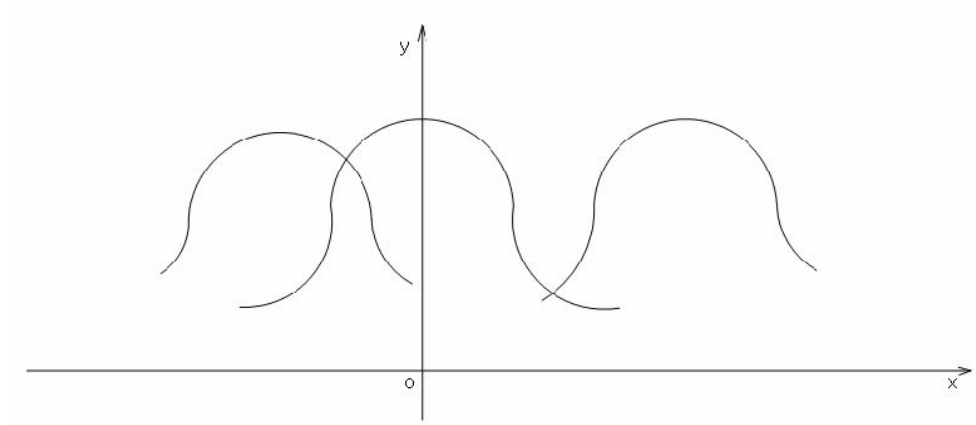
x	$-\infty$		$m-\sigma$		m		$m+\sigma$		$+\infty$
$f^{'}(x)$	++++++++++	++++++++++	++++++++++	++++++++++	0	----------	----------	----------	----------
$f^{''}(x)$	++++++++++	++++++++++	0	----------	----------	----------	0	++++++++++	++++++++++
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$	↗	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	↘	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

V. Reprezentare grafică



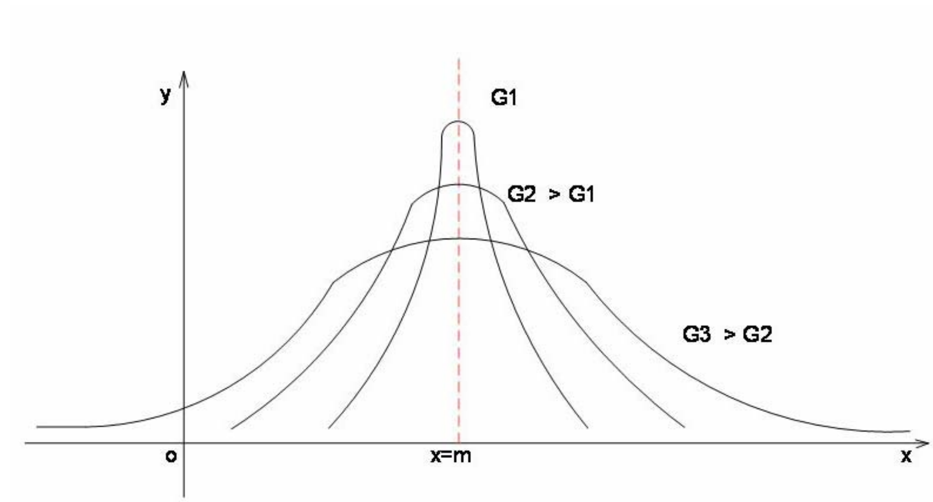
VI. În rezumat :

1. Curba este simetrică în raport cu axa x = m.
2. Avem maxim în punctul de abscisă x = m.
3. Punctele de inflexiune au abscisele x = $m - \sigma$ şi $m + \sigma$
4. Dacă trasăm această curbă pentru diferite valori ale lui m, σ fiind constant obținem :



Astfel parametrul m va avea rolul de poziționare a curbei pe axa 0x.

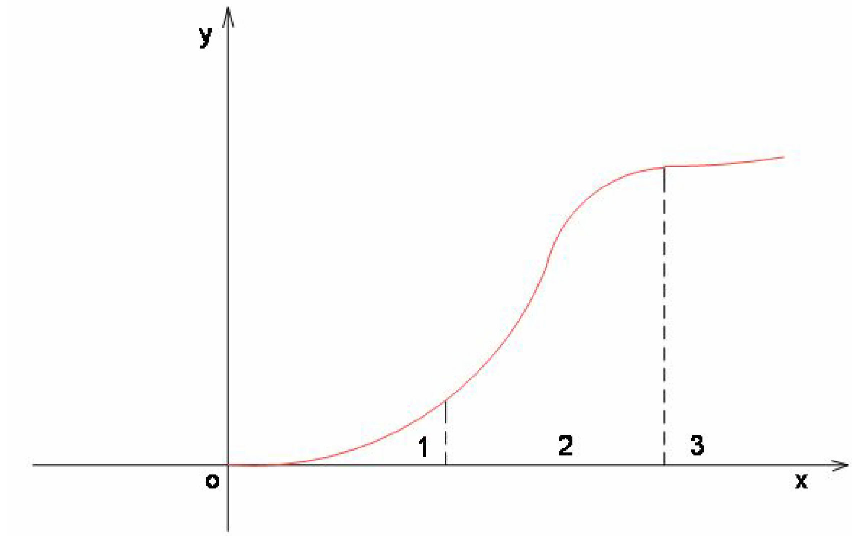
5. Dacă trasăm curba pentru diferite valori ale lui σ (m fiind fixat) obținem



Astfel parametrul σ este un parametru de dispersie în jurul axei de simetrie x = m

Funcția logistică

Să presupunem că suntem interesați de difuzarea televizoarelor alb-negru spre populație. Ce vom observa?La început foarte puține persoane intră în posesia lor. Treptat însă, prețul scăzând, din ce în ce mai multe familii îl achiziționează. În final aproape fiecare cămin posedă unul. Piața va fi saturată. Acest fenomen este clasic şi curba care îl descrie are forma :



O astfel de curbă se numeşte curbă logistică şi are ecuația :

$$f(t) = \frac{a}{1+bc^{-d}} \quad : \quad a,b,c>0$$

I. Domeniul de definiție D = R

II. Limitele la $+\infty$ şi $-\infty$

$$\lim_{t\to(x)} f(t) = a \qquad : \qquad \lim_{t\to -\infty} f(t) = 0$$

Astfel graficul are ca asimtotă orizontală dreapta x – 0 spre -∞ şi dreapta y = a spre +∞.Din acest motiv vom numi parametrul a valoarea de saturație.

III. Derivata

$$f^{'}(t) = \frac{abc \cdot e^{ct}}{(1+be^{-ct})^2}$$

$f^{'}(t)>0 \quad (\forall)\ t$ şi deci funcția este strict crescătoare .

$$f^{"}(t) = \frac{-abc^2e^{-ct}\left(1+be^{-ct}\right)^2 - abce^{-ct}2\left(1+be^{-ct}\right)\cdot be^{-ct}\left(-c\right)}{(1+be^{-ct})^4}$$

Vom nota e^{-ct} = u

$$f^{"}(t) = \frac{-abc^2u\left(1+2bu+b^2u^2\right)+2ab^2c^2u^2\left(1+bu\right)}{(1+bu)^4}$$

$$f^{"}(t) = \frac{-abc^2u - 2ab^2c^2u^2 - ab^3c^2u^3 + 2ab^2c^2u^2 + 2ab^3c^2u^3}{(1+bu)^4}$$

$$f''(t) = \frac{ab^3c^2u^3 - abc^2u}{(1+bu)^4} = \frac{abc^2u\left(b^2u^2 - 1\right)}{\left(1+bu\right)^4}$$

$$f''(t) = \frac{abc^2u(bu-1)(bu+1)}{(bu+1)^4} = \frac{abc^2u\left(bu-1\right)}{\left(bu+1\right)^3}$$

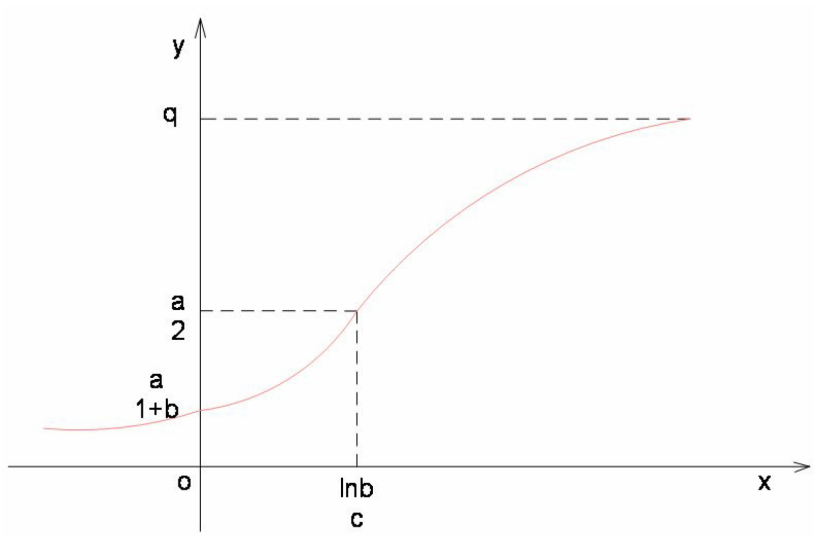
$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow bu = 1 \Rightarrow e^{-ct} = \frac{1}{b} \Rightarrow -ct = -\ln b \Rightarrow t = \frac{\ln b}{c}$$

Valoarea lui f în acest punct este $f\left(\frac{\ln b}{c}\right) = \frac{a}{2}$

IV. Tabel de variație

x	$-\infty$		$\frac{\ln b}{c}$		$+\infty$
$f'(x)$	+++++++++++++++++++++++++++++++				
$f''(x)$	++++++++++++++		0	-----------------------	
$f(x)$	0	↗	$\frac{a}{2}$	↗	a

V. Reprezentare grafică



Capitolul 3 **Calcul integral**

Funcții primitivabile.

Definiție, proprietăți, tabel de primitive

Definiție : O funcție $f : I \to$ R ($I \subset$ R interval) se numeşte primitivabilă dacă există F : $I \to$ R derivabilă astfel încât F (x) = f (x), $(\forall x \in I)$. F se numeşte primitivă a funcției f şi vom nota cu

$$\int f(x)dx$$

105 + g mulțimea tuturor primitivelor funcției *f.*

Observație. Avem $\int f(x)dx$ = F + C, unde cu C am notat mulțimea funcțiilor constante definite pe I cu valori reale.

Teoremă. Liniaritatea operatorului de primitive.

Dacă *f*, g : $I \to$ R sunt primitivabile şi $\lambda \in R^*$ atunci f + g şi λf sunt primitivabile şi în plus :

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

Teoremă.

1. Dacă $f : I \to$ R este continuă atunci f este primitivabilă ;
2. Dacă $f : I \to$ R este primitivabilă atunci f are proprietatea lui Darboux

Tabel de primitive

1. $$\int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \ dacă \ a \neq -1 \\ \ln |x| + C \ dacă \ a = -1 \end{cases}$$

2. $$\int x^a dx = \frac{a^z}{\ln a} + C \ , \ a > 0, \ a \neq 1.$$

   In particular $\int x^a dx = e^x = C$

3. $$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

4. $$\int \cos x dx = -\sin x + C$$

5. $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg \ x + C$$

6. $$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg \ x + C$$

7. $\int tg\ x\ dx = -\ln|\cos\ x| + C$

8. $\int ctg\ x\ dx = -\ln|\sin\ x| + C$

9. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a}\ \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\ ;\ a \neq 0$

10. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{a}\ arctg\ \frac{x}{a} + C\ ;\ a \neq 0$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\ dx = \ln\left|\ x + \sqrt{x^2 - a^2}\ \right| + C\ ; a > 0$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\ dx = \ln\left|\ x + \sqrt{x^2 - a^2}\ \right| + C\ ; a \neq 0$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\ dx = \arcsin\ \frac{x}{a} + C\ ; a > 0.$

Observație. La scrierea acestor formule nu am precizat cine este intervalul $I \subset$ R pe care sunt valabile. Astfel la formula (1) dacă :

1. a > -1 atunci $I \subset$ R ;
2. a ≤ 1 $a \in Z$ atunci $I \subset\ R^*$
3. a ≤ 1 $a \in R - Z$ atunci $I \subset\ (0,\infty)$.

Formulele (5) şi (7) sunt valabile pentru $I \subset$ R $\setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} ; k \in Z-\right\}$.

Formulele (6) şi (8) au loc pentru $I \subset$ R $\setminus \{k\pi ; k \in Z\ \}$.

Formula (9) este valabilă pentru $I \subset$ R $\setminus \{-a, a\ \}$.

Formula (11) este valabilă pentru $I \subset (-\infty, -a)\ sau\ I \subset (a, \infty)$.

Formula (13) este valabilă pentru $I \subset (-a, a)$.

Formula de integrare prin părți

Teoremă. Dacă *f*, g : *I* → R sunt derivabile cu derivate conține atunci :

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Observație. Această formulă poate fi aplicată cu succes în multe situații. Precizăm două dintre cele mai des întâlnite.

I. *f'* este e^x, sin *x*, cos *x* şi *g* este e^x, sin *x*, cos *x* sau o funcție polinomială.

II. *f'* este o funcţie polinominală şi $g(x)=\ln^k x, \quad k\in N^*$.

Formula schimbării de variabilă.

Teoremă. Prima formulă de schimbare de variabilă.

Fie *I, J*$\subset$ R intervale. Dacă *f : J* $\rightarrow$ R este primitivabilă şi $\varphi : I\rightarrow J$ este derivabilă atunci $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite pe I primitivă F $\circ\varphi$, unde F este o primitivă oarecare a funcţiei *f*, adică :

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\{\int f(x)dx\}_{x=\varphi(t)}.$$

Teoremă. Formula a doua de schimbare de variabilă.

Fie *I, J*$\subset$ R intarvale. Dacă *f : J* $\rightarrow$ R admite primitive, $\varphi : I\rightarrow J$ este bijectivă, derivabilă, cu derivabilă cu derivată nenulă pe I atunci *f* admite pe I primitiva G $\circ\varphi^{-1}$ unde G este o primitivă pentru $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ iar φ^{-1} este inversa funcţiei φ . Deci :

$$\int f(x)dx=\left[\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Calculul prin recurenţă a unor integrale.

Pentru exemplificare vom considera :

$$I_n(x)=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx \quad n\geq 1 \quad ,a\neq 0.$$

Observăm că :

$$I_1(x)=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a}\ arctg\ \frac{x}{a}+C.$$

Dorim să găsim o relaţie de recurenţă adică o formulă care exprimă $l_n(x)$ în funcţie de $l_{n-1}(x)$.Utilizând această relaţie de recurenţă din $l_1(x)$ vom putea deduce valoarea lui $l_2(x)$, din $l_2(x)$ va rezulta $l_3(x)$ şi aşa mai departe.

Pentru n $\geq$ 2 vom avea :

$$I_1(x)=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\int\frac{(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)}dx-\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)}dx\right]$$

$$I_n(x)=\frac{1}{a^2}\left[I_{n-1}(x)-\int x\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}dx\right].$$

$$f'(x)=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}\Rightarrow f(x)=\int\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx$$

Vom face schimbarea de variabilă $x^2+a^2=t$. Atunci $2xdx=dt$.

Revenind obținem

$$f(x)=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^n}=\frac{1}{2}\int t^{-n}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1}=\frac{1}{2(1-n)\cdot\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\cdot$$

$$g(x)=x\Rightarrow g'(x)=1.$$

$$I_n(x)=\frac{1}{a^2}\left[I_{n-1}(x)-\frac{x}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\int\frac{1}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}dx\right]$$

$$I_n(x)=\frac{1}{a^2}I_{n-1}(x)-\frac{x}{2a^2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\int\frac{1}{2a^2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\cdot I_{n-1}(x)$$

$$I_n(x)=\frac{x}{2a^2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2a^2(1-n)}\cdot I_{n-1}(x).$$

Primitivele funcțiilor raționale

I. Mai întâi se scrie funcția rațională sub forma unei sume în care pot interveni un polinom şi funcții raționale de forma :

$$(1)\frac{A}{(x-a)^n},\quad a,A\in R\quad ,n\in N^*$$

$$(2)\frac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^n}\quad ;\ B,C,b,c\in R,\quad b^2-4c<0,\quad n\in N*$$

Cum vom face acest lucru ?

Reamintim că funcția rațională f este câtul a două funcții poliomiale P şi Q, adică $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$. Dacă grad P ≥ grad Q vom putea efectua împărțirea şi vom obține :

P (x) = Q (x) · C (x) + R (x) în care câtul C (x) este polinom iar restul R (x) este tot un polinom cu grad R < grad Q. Atunci funcția rațională *f* se va scrie

$$f(x)=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

In cazul în care grad P < grad Q vom scrie $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ unde R (x) = P (x).

Pentru a scrie acum $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ca o sumă de fracţii de forma (1) şi (2), vom proceda în felul următor :

1. Dacă polinomul Q are rădăcina reală ’’ a ’’ având ordinul de multiplicitate k în descompunerea lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ vom avea termenii

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+....+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

2. Dacă polinomul Q are rădăcina complexă $\alpha \pm i\beta$ având ordinul de multiplicitate m atunci în descompunerea lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ vom avea fracţiile

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+....+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

unde b = - 2a, c = $x^2+\beta^2$. In final se vor determina constantele $A_1, A_2,....B_1, B_2,...., C_1, C_2,.....$

II. Acum că funcţia raţională este scrisă ca suma dintre un polinom şi funcţii raţionale de forma (1) şi (2) pentru a calcula primitiva unei funcţii raţionale va trebui să ştim să calculăm primitivele funcţiilor polinimiale (ceea ce este clar dacă utilizăm liniaritatea operatorului de primitivare şi prima formulă din tabelul de primitive) şi primitivele funcţiilor raţionale de forma (1) şi forma (2).

Vom avea :

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{1}{t^n}dt = A\int t^{-n}dt = A\begin{cases} \frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C & dacă \quad n \neq 1 \\ \ln \left| \; t \; \right| \,|\, C & dacă \quad n=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} A\frac{(x+a)^{+n+1}}{-n+1}+C & dacă \quad n \neq 1 \\ A \ \ln \left| \; x-a \; \right| + C & dacă \quad n=1 \end{cases}$$

Apoi

$$\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx = \int \frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}\right]^n}dx.$$

Cum $b^2-4c<0$ vom avea $\frac{4c-b^2}{4}>0$ şi vom putea nota $\frac{4c-b^2}{4} = k^2$.

Vom face schimbarea de variabilă $x+\frac{b}{2}=t.$ Atunci dx = dt. Revenind avem :

$$\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx = \int \frac{B\left(t-\frac{b}{2}\right)+C}{\left(t^2+k^2\right)^n}dt =$$

$$= B\int \frac{t}{\left(t^2+k^2\right)^n}dt + \left(C-\frac{Bb}{2}\right)\int \frac{1}{\left(t^2+k^2\right)^n}dt.$$

Prima integrală se va calcula cu schimbarea de variabilă $t^2+k^2=u,$ iar a doua prin recurenţă.

Primitivele unor funcţii iraţionale

Vom nota în continuare cu r o funcţie raţională ce poate fi de mai multe variabile.

I. Primitivarea funcţiei :

$$f(x)=R\left(x,\sqrt[n_i]{ax+b}\right)$$

se reduce la primitivarea unei funcţii raţionale făcând schimbare de variabilă

$\sqrt[n]{ax+b}=t$ unde n = c.m.m.m.c $\{n_i\}_{i=1}^{p}$

Mai notăm că $x=\frac{1}{a}\left(t^n-b\right)$ şi $dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt.$

II. Dacă $f(x)=R\left(x,\sqrt[n_i]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ vom proceda asemănător utilizând schimbarea de variabilă :

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t \text{ unde n = c.m.m.m.c } \{n_i\}_{i=1}^{p}.$$

III. $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Vom calcula $\Delta=b^2-4ac.$ Avem cazutile :

(A) $\Delta=0$ atunci pentru ca radicalul să aibă sens va rezulta a > 0 şi atunci

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\left|\ x+\frac{b}{2a}\ \right|$$

(B) $\Delta < 0$, caz în care a > 0.vom face schimbarea de variabilă

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x = t$$

$$\Rightarrow ax^2+bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}tx + ax^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2t\left(b+2t\sqrt{a}\right)-\left(t^2-c\right)\cdot 2\sqrt{a}}{\left(b+2t\sqrt{a}\right)^2}dt \Rightarrow dx = \frac{2tb+2t^2\sqrt{a}+2c\sqrt{a}}{\left(b+2t\sqrt{a}\right)^2}dt$$

(C) $\Delta > 0$. Primitivele se caută pe un interval pe care radicalul este definit şi pe care nu se anulează numitorul fracţiei. Cum

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}$$

funcţia se poate scrie

$$R\left(x, \left| x-x_1 \right| \sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}\right)$$

şi am redus problema la cazul II, deci facem substituţia

$$\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}} = t$$

Primitivele funcţiilor trigonometrice

Notăm cu R (u, v) o funcţie raţională în variabile u şi v. Pentru funcţia : *f* (x) = R (sin x, cos x) se face substituţia $tg\frac{x}{2} = t$ şi problema revine la calculul primitivei unei funcţii raţionale. Să mai notăm că

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Să precizăm că se aplică formula a II-a de schimbare de variabilă şi acest lucru este posibil pe un interval pe care funcţia $\varphi(x) = tg\frac{x}{2}$ este bijectivă. Prin urmare această metodă se aplică pe intervale de forma $\left((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\right), k \in Z.$

Observaţie. Calculul primitivei poate fi simplificat în următoarele cazuri :

1. Dacă R (- u, v) = - R (u, v) vom face substituţia cos x = t
2. Dacă R (u, - v) = - R (u, v) vom face substituţia sin x = t
3. Dacă R (- u, -v) = R (u, v) vom face substituţia tg x = t

Funcţii integrabile

Definiţie şi proprietăţi

Fie $f:[a,b]\to R$ şi Δ o diviziune a intervalului $[a,b]$

$$\Delta: a=x_0<x_1<x_2<....<x_n=b.$$

Numărul $\|\ \Delta\ \|=\max\limits_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$ este numit norma diviziunii Δ (lungimea celui mai mare interval al diviziunii).

Considerăm un system de puncte intermediare $\{\ \varepsilon_k\ \}^n{}_{k=1}$ ataşat diviziunii Δ, adică un system de n puncte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, cu proprietatea $x_{k-1}\le\varepsilon_k\le x_k \qquad (\forall)k=\overline{1,n}$.

Se numeşte sumă Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $\{\ \varepsilon_k\ \}^n{}_{k=1}$ numărul real :

$$\sigma(f;\Delta;\{\ \varepsilon_k\ \})=\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)(x_k-x_{k-1})$$

Definiție. Funcția $f:[a,b]\to R$ se numeşte integrabilă Riemann dacă :

$(\exists)\qquad I\in R:(\forall)e>0(\exists)\sigma>0$ astfel încât $(\forall)\Delta$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ cu $\|\ \Delta\ \|<\sigma \qquad$ *şi* $(\forall)\ \{\ \varepsilon_k\ \}$ un sistem de puncte intermediare ataşat lui Δ avem:

$$|\ \sigma(f;\Delta;\{\ \varepsilon_k\ \})-I\ |<e$$

Numărul I se notează $\int\limits_a^b f(x)dx$ şi se numeşte integrală Riemann a funcției f pe intervalul $[a,b]$.

Observație. Intr-un alt limbaj o funcție $f:[a,b]\to R$ este integrabilă riemann dacă sumele riemann asociate funcției F converg spre o limită finită I atunci când $\|\ \Delta\ \|\to 0$.

Propoziție. Fie $f:[a,b]\to R$ şi $c\in(a,b)$. Dacă f este integrabilă pe $[a,c]$ şi $[c,b]$ atunci f este integrabilă pe $[a,b]$ şi :

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b f(x)dx$$

Teoremă. Formula lui Leibniy-Newton

Fie $f:[a,b]\to R$ o funcție integrabilă şi primitivă pe $[a,b]$ şi F o primitivă a ei.Atunci :

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Propoziție.

1. Dacă f este continuă pe $[a,b]$ atunci f este integrabilă pe $[a,b]$.
2. Dacă f este monotonă pe $[a,b]$ atunci f este integrabilă pe $[a,b]$.
3. Dacă f este integrabilă pe $[a,b]$ atunci f este mărginită pe $[a,b]$.

Observație. Afirmațiile reciproce nu sunt în general valabile.

Spre exemplu funcția :

$$f:[\ 1,4\ ]\to R \qquad f(x)=\begin{cases} 2 & dacă \ \ 1\le x<3 \\ 5 & dacă \ \ 3\le x\le 4 \end{cases}$$

este integrabilă pe intervalul [1, 4] şi :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_1^3 2dx+\int_3^4 5dx=2x\Big|_1^3+5x\Big|_3^4=6-2+20-15=9.$$

Dar nu este continuă pe intervalul [1, 4] pentru că 3 este un punct de discontinuitate.

Apoi $f:[-1,1]\to R \qquad f(x)=x^2$ este integrabilă pe [-1, 1] şi :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

dar ea nu este monotonă pe [-1, 1].

Dacă considerăm $f:[0,1]\to R \qquad f(x)=\begin{cases} 1 & dacă \ \ x\in Q \\ 0 & dacă \ \ în \ \ rest \end{cases}$

atunci evident f este mărginită dar ea nu este integrabilă.

Intr-adevăr dacă considerăm :

$$\Delta : a=x_0<x_1<....<x_n=b.$$

o diviziune a intervalului $[a,b]$ şi $\{\ \varepsilon_k\ \}$ un system de puncte intermediare asociat diviziunii atunci dacă ε_k sunt numere raționale :

$$\sigma(f;\Delta;\{\ \varepsilon_k\ \})=\sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^n (x_k-x_{k-1})=b-a$$

care converge la b – a, iar dacă ε_k sunt numere iraționale :

$$\sigma(f;\Delta;\{\ \varepsilon_k\ \})=\sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k)(x_k-x_{k-1})=0\to 0.$$

Cum limita sumelor Riemann depinde de alegerea punctelor intermediare $\{ \varepsilon_k \}$ rezultă că funcția f nu este integrabilă pe [0, 1].

Observație. Să notăm că există funcții intagrabile care nu sunt primitivabile şi există funcții primitivabile care nu sunt integrabile.

Funcția $f:[0,\ 2]\to R$ $\qquad f(x)=\begin{cases} 1 & dacă \quad x\neq 1 \\ 0 & dacă \quad x=1 \end{cases}$ este integrabilă şi :

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 1dx+\int_0^{21} 1dx=x\Big|_0^1+x\Big|_1^2=2.$$

dar f nu este primitivabilă pentru că f nu are proprietatea lui Darboux.

Apoi funcția :

$$f:[-1,\ 1]\to R \qquad f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & dacă \quad x\neq 1 \\ 0 & dacă \quad x=1 \end{cases}$$

nu este mărginit deci ea nu este integrabilă, dar :

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2} & dacă \quad x\neq 0 \\ 0 & dacă \quad x=0 \end{cases}$$

este primitivă pentru f. Intr-adevăr :

$$F'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

pe $[-1,0\ )\cup(\ 0,1\ ]$.Apoi $(\exists)\lim\limits_{x\to 0}F(x)=0$ şi deci F este continuă în 0 şi :

$$(\exists)\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0$$

deci F este derivabilă în 0 şi $F'(0)=0$. Obținem astfel că F este derivabilă pe [-1, 1] şi $F'=f$.

Teoremă.

1. Dacă f, g : [a, b] → R sunt integrabile pe [a, b] şi $\alpha,\beta\in R$ atunci $\alpha\ f+\beta\ g$ este integrabilă pe [a, b] şi :

$$\int_a^b (\alpha\ f+\beta\ g)(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

2. Dacă f, g : [a, b] → R sunt integrabile şi $f(x) \le g(x) (\forall) x \in [\ a, b\ ]$

$$\text{atunci} \quad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

In particular :

a) Dacă $f(x) \ge 0 \quad (\forall) x \in [\ a, b\ ]\ atunci\ \int_a^b f(x)dx \ge 0$

b) Dacă m $\le f(x) \le M \quad (\forall) x \in [\ a, b\ ]$ atunci :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

c) Dacă f şi $|\ f\ |$ sunt integrabile atunci :

d)

$$|\int_a^b f(x)dx\ | \le | \ \le \int_a^b |\ f(x)\ |dx$$

3. Dacă f : [a, b] → R este integrabilă atunci :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\ ;\ \int_a^b f(x)dx = 0$$

4. Teoremă de medie. Dacă f : [a, b] → R este continuă atunci $(\exists) c \in [\ a, b\ ]$ astfel încât :

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Metode de calcul

Dacă f : [a, b] → R este integrabilă şi primitivabilă atunci aşa după cum am văzut pentru calculul integralei lui f pe intervalul [a, b] poate fi aplicată formula lui Leibniz-Newton. Tehnicile de calcul primitivelor se vor putea transpune la calculul integralelor. Astfel vom avea :

Teoremă. Dacă f, g : [a, b] → R sunt funcții derivabile cu derivate continue atunci :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g^{'}(x)dx$$

Teoremă. Prima formulă de schimbare de variabilă

Fie $\sigma : [\ a,b\ ] \to J$ (J interval) derivabilă cu derivată continuă şi f : J → R continuă.Atunci :

$$\int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt = \int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} f(x)dx$$

Teoremă. A doua formulă de schimbare de variabilă

Fie $\int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt = \int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} f(x)dx$ (J interval) bijectivă astfel încât σ şi σ^{-1} sunt derivabile cu derivate continue.Fie f : J → R continuă. Atunci :

$$\int_a^b f(\sigma(t))dt = \int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} f(x)\left(\sigma^{-1}\right)'(x)dx$$

Integrale generalizate

Definiție, exemple şi metode de calcul

In definiția integralei $I = \int_a^b f(x)dx$ se presupune că intervalul $[\ a,b\ ]$ este de lungime finită şi că f este o funcție mărginită pe $[\ a,b\ ]$.

Vom conveni să numim generalizate integrale pentru care lungimea intervalului de integrare este infinită sau f nu este mărginită pe $[\ a,b\ ]$ şi se va utiliza următoarea clasificare :

1. Integrale generalizate de speța întâi :

$$I = \int_a^\infty f(x)dx, \qquad I = \int_{-\infty}^b f(x)dx, \qquad I = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

F rămânând mărginită pe intervalul de integrare.

2. Integrale generalizate de speța a doua : b – a < ∞ dar f este nemărginită pe $[\ a,b\ ]$.

3. Integrale generalizate de speța a treia dacă atât intervalul de integrare este de lungime infinită cât şi f este nemărginită pe aceste intervale.

In continuare vom restrânge discuția la cazul unei funcții f : [a, b] → R cu proprietatea că este integrabilă pe orice interval [a, t] ⊂ [a, b]. Punctul b va fi numit punct singular pentru aplicația f.

Definiție. Dacă există şi este finită limita $\lim\limits_{t \to b} \int\limits_{a}^{t} f(x)dx = l$ vom spune că integrala generalizată $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ este convergentă ți îi atribuim valoarea l.

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to b} \int\limits_{a}^{t} f(x)dx$$

Dacă limita nu există sau este infinită atunci integrala generalizată se numeşte divergentă şi nu i se atribuie nici o valoare.

Observație. Acesta este cazul unei intagrale generalizate de spețа întâi dacă b = ∞, de speța a doua dacă b < ∞ dar f nemărginită pe orice vecinătate a lui b, de speța a treia dacă b = ∞ şi f nemărginită pe orice vecinătate a lui b.

Observație. Cazul unei funcții f : (a, b] → R integrabilă pe $(\forall)[\ t, b\ ] \subset (\ a, b\ ]$ va fi tratat în mod analog. In acest caz punctul a este numit punct singular pentru aplicația f.

Astfel dacă există şi este limită $\lim\limits_{t \to a} \int\limits_{t}^{b} f(x)dx = l$ atunci integrala generalizată $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ se numeşte convergentă şi îi atribuim valoarea l.

Observație. Dacă $(\exists)c \in (a, b)$ astfel încât f nemărginită pe orice vecinătate a lui c (în acest caz punctul c se numeşte punct singular pentru f) atunci vom scrie :

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

şi am redus problema la cele două cazuri precedente.

Teoremă. Formula lui Leibniz – Newton generalizată

Dacă f : [a, b] → R este integrabilă pe $(\forall)[\ t, b\ ] \subset (\ a, b\ ]$ şi admite primitiva F pe [a, b)

atunci $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $(\exists)\lim\limits_{t \to b} F(t)$.

In plus avem $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t \to b} F(t) - F(a)$.

Demonstrație: Avem $\int\limits_{a}^{t} f(x)dx = \lim\limits_{t \to b} F(t) - F(a)$ şi prin trecere la limită se obține afirmația din enunț.

Teoremă. Formula de integrare prin părți generalizată.

Fie f, g : [a, b) → R derivabile cu derivate continue. Dacă $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx$ este convergentă

şi există $\lim_{t\to b} f(t)g(t)$ atunci şi $\int_a^b f'(x)g(x)$ este convergentă şi

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \lim_{t\to b} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Demonstraţie.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

şi trecem la limită pentru t → b.

Teoremă. Formula schimbării de variabilă generalizată.

Fie $\sigma : [a, b) \to J$ derivabilă cu derivată continuă $L = \lim_{t\to b} \sigma(t)$, f : J → R continuă. Atunci :

$$\int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt = \int_{\sigma(a)}^L f(x)dx$$

Demonstraţie : Prin trecere la limită în formula clasică de schimbare de variabilă.

Criterii de convergenţă

Teoremă. Criteriul general al lui Cauchy

Fie f : [a, b] → R integrabilă pe $(\forall)[t, b] \subset (a, b]$.Atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă

dacă şi numai dacă $(\forall)e > 0 (\exists)\sigma > 0$ astfel încât $(\forall)x', x'' \in (\sigma, b) avem \left| \int_{x'}^{x''} f(x)dx \right| < e.$

Demonstraţie. Fie $F(t) = \int_a^t f(x)dx$. Atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă

$(\exists) \lim_{t\to b} F(t) = I$.

$$\Leftrightarrow (\forall)e(\exists)\sigma > 0 : (\forall)x', x'' \in (\sigma, b) \left| F(x'') - F(x') \right| < e$$

Dar $F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x''} f(x)dx$.

Definiție. Integrala generalizată $\int_a^b f(x)dx$ se numeşte adsolut convergentă dacă integrala generalizată $\int_a^b | f(x) | dx$ este convergentă.

Teoremă. Orice integrală generalizată absolut convergentă este convergentă.

Demonstrație.Se aplică criteriul general al lui Cauchy observând că :

$$| \int_{x'}^{x''} f(x)dx | \le \int_{x'}^{x''} | f(x) | dx .$$

Teoremă. Criteriul I al comparației

Fie f, g : [a, b) → R integrabile pe $(\forall)[a,t] \subset [a,b)$ şi $0 \le f(x) \le g(x);\ (\forall) x \in [a,b)$.

Atunci :

1. $\int_a^b g(x)dx$ convergentă $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ convergentă ;

2. $\int_a^b f(x)dx$ divergentă $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ divergentă ;

Demonstrație. Din $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_{x'}^{x''} f(x)dx \le \int_{x'}^{x''} g(x)dx$ şi aplicăm criteriul general al lui Cauchy.

Teoremă. Criteriul al II-lea al comparației

Dacă f, g : [a, b) → R integrabile pe $(\forall)[a,t] \subset [a,b)$ şi

$$(\exists)\lim_{t\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = l \in (0,\infty)$$

atunci $\int_a^b f(x)dx$ şi $\int_a^b g(x)dx$ au aceaşi natură.

Demonstrație : $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}}\frac{f(x)}{g(x)} = l \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3l}{2}$ *pentru* $x \in (\sigma, b)$. Din $f(x) < \frac{3l}{2} g(x)$ şi criteriul I al comparației abținem că $\int_a^b g(x)dx$ convergentă $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ convergentă. Din

inegalitatea $\frac{1}{2} f(x) < g(x)$ şi criteriul I al comparației va rezulta că dacă $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă arunci $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă.

Consecința. Criterii practice pentru studiul convergenței integralelor generalizate.

1. Fie f : [a, ∞) → R integrabile pe $(\forall)[a,t] \subset [a,\infty)$. Dacă $(\exists)\lim\limits_{t\to b} x^{\alpha} f(x) = l \in (0,\infty)$ atunci :

$$(a)\ \alpha > 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ convergentă ;}$$

$$(b)\ \alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ divergentă ;}$$

2. Fie f : [a, b) → R integrabile pe $(\forall)[a,t] \subset [a,b)$. Dacă $(\exists)\lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} (b-x)^{\alpha} f(x) = l \in (0,\infty)$ atunci :

$$(a)\ \alpha < 1 \Rightarrow \int_a^{b} f(x)dx \text{ convergentă ;}$$

$$(b)\ \alpha \geq 1 \Rightarrow \int_a^{b} f(x)dx \text{ divergentă.}$$

3. Fie f : (a, b] → R (a finit) integrabile pe $(\forall)[t,t] \subset [a,b)$. Dacă $(\exists)\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} (x-a)^{\alpha} f(x) = l \in (0,\infty)$ atunci :

$$(a)\ \alpha < 1 \Rightarrow \int_a^{b} f(x)dx \text{ convergentă ;}$$

$$(b)\ \alpha \geq 1 \Rightarrow \int_a^{b} f(x)dx \text{ divergentă.}$$

Demonstrație . 1.Fie $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Atunci $(\exists)\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in (0,\infty)$ Din criteriul II al comparației va rezulta că $\int_a^{\infty} f(x)dx$ are aceeaşi natură cu $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ care este convergentă dacî şi numai dacă $\alpha > 1$.

2. Fie $g(x)=\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}$. Vom calcula integrala funcției g utilizând schimbarea de variabilă b – x = u ; - dx = du. Astfel obținem

$$\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \frac{1}{(b-x)^{\alpha}}dx=-\int_{b-a}^{0}\frac{1}{u^{\alpha}}du=$$

$$\int_a^{b-a} u^{-\alpha}du=\begin{cases}\left[\frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\right]_0^{b-a} & dacă\ \alpha\neq 1\\ \left[\ \ln\ |\ u\ |\ \right]_0^{b-a} & dacă\ \alpha=1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\lim\limits_{u\to 0}\frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & dacă\ \alpha\neq 1\\ \ln(b-a)-\lim\limits_{u\to 0}\ln\ |\ u\ | & dacă\ \alpha=1\end{cases}$$

Astfel $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $-\alpha+1>0$ adică $\alpha<1$. Aplicând Criteriul al II – lea al comparației, cum $(\exists)\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}\frac{f(x)}{g(x)}=l\in(0,\infty)$ va rezulta că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha<1$.

3. Analog cu 2.

Teoremă. Criteriul integral al lui Cauchy

Fie f : [a, ∞) → R pozitivă şi descrescătoare. Atunci $\int_1^{\infty} f(x)dx$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ au aceeaşi natură.

Demonstrație: Observăm că

$$\int_1^n f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+....+\int_{n-1}^n f(x)dx$$

şi folosind faptul că f este descrescător obținem :

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\leq\int_1^n f(x)dx\leq f(1)+f(2)+....\ f(n-1)$$

De aici rezultă că $\int_1^{\infty} f(x)dx$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ au aceeaşi natură.

Funcțiile Beta şi Gamma ale lui Euler

Definiție. Integrala

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, \qquad a>0,\ b>0$$

Se numeşte funcția Beta a lui Euler.

Integrala

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx, \qquad a>0$$

Se numeşte funcția Gamma a lui Euler.

Propoziție. Integralele Beta şi Gamma sunt convergente.

Demonstrație : Dacă a ≥ 1, b ≥ 1 atunci integrala Beta este o integrală proprie. Pentru alte valori ale lui a şi b determină α astfel încât

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)^a x^{a-1}(1-x)^{b-1}\in(0,\infty)$$

Rezultă a + b – 1 = 0 deci a = 1 – b. Cum b > 0 $\Rightarrow$ a < 1 şi deci $\int_{1/2}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ este convergentă. Apoi determinăm α astfel încât

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^{\alpha}\cdot x^{a-1}(1-x)^{b-1}\in(0,\infty)$$

Rezultă a + a – 1 = 0 deci a = 1 – a. cum a > 0 $\Rightarrow$ a < 1 şi deci $\int_0^{1/2} x^{a-1}(d-x)^{b-1}dx$ este convergentă. Atunci cum

$$B(a,b)=\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx+\int_{1/2}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

Se obține că integrala Beta este convergentă.

Acum vom scrie :

$$\Gamma(a)=\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}dx.$$

Determinăm a astfel încât $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^{\alpha}\cdot x^{a-1}e^{-x}\in(0,\infty)$. Obținem a + a – 1 = 0 şi deci a = 1 – a.Cum însă a > 0 obținem că a < 1 şi deci $\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ este convergentă.

Dacă notăm $b(x)-x^{a-1}e^{-x}$ observăm că

$$\lim_{x\to\infty} x^2 h(x) = \lim_{x\to\infty} x^{a+1} e^{-x} = 0$$

şi atunci $(\exists)M > 0$ astfel încât

$$0 < h(x) < \frac{M}{x^2}, \qquad (\forall)x \in [\ 1, \infty\ )$$

Cum însă $\int_1^\infty \frac{M}{P} dx$ este convergentă aplicând criteriul I al comparației va rezulta că $\int_1^\infty b(x)dx$ este convergentă. Astfel am obținut că integrala Gamma ste convergentă.

Propoziție. Funcțiile Beta şi Gamma au proprietățile :

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$;
3. $\Gamma(n+1) = n\ ! \qquad (\forall)n \in N$;
4. $B(a,b) = B(b,a)$;
5. $B(a,b) = \dfrac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1) \qquad$ *pentru* $a > 0,\ b > 1$;
6. $B(m,n) = \dfrac{(m-1)\ !\ (n-1)\ !}{(m+n-1)\ !} \qquad$ *pentru* $m, n \in N.$

Demonstrație :

1.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty - e^0 = 1$$

2.

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a e^{-x} dx$$

Vom aplica formula de integrare prin părți :

$$f'(x) = e^{-x} \qquad \Rightarrow f(x) = -e^{-x}$$

$$g(x) - x^a \qquad \Rightarrow g'(x) - a \cdot a^{a-1}$$

$$\Gamma(a+1) = -x^a e^{-x}\Big|_0^\infty + a\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx - a \cdot \Gamma(a)$$

3. Rezultă prin inducție.

4. $B(b,a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1} dx$

Facem schimbarea de variabilă : x = 1 – t şi obţinem

$$B(b,a) = -\int_1^0 (1-t)^{b-1} t^{a-1} dt = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt \qquad B(a,b)$$

5. $B(b,a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$

Aplicăm formula de integrare prin părţi

$$f'(x) = x^{a-1} \qquad \Rightarrow f(x) = \frac{x^a}{a}$$

$$g(x) = (1-x)^{b-1} \qquad \Rightarrow g'(x) = (b-1)(1-x)^{b-2}(-1)$$

$$B(a,b) = \frac{x^a}{a}(1-x)^{b-1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^a}{a}\cdot(b-1)(1-x)^{b-2} dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2} dx = \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}(1-(1-x))dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2} dx - \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}B(a,b-1) - \frac{b-1}{a}B(a,b)$$

Obţinem astfel că

$$B(a,b) + \frac{b-1}{a}B(a,b) = \frac{b-1}{a}B(a,b-1)$$

de unde

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$$

6.

$$B(m,n) = \frac{n-1}{m+n-1}B(m,n-1) = \frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{n-2}{m+n-2}B(m,n-2) =$$

$$= .... = \frac{(n-1)(n-2)....1}{(m+n-1)(m+n-2)....(m+1)}B(m,1)$$

Dar

$$B(m,1) = \int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m}\Big|_0^1 = \frac{1}{m}$$

şi se obține formula dorită.

Teoremă.

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\qquad (\forall)a,b>0.$$

Demonstrație : Avem $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$

Vom face schimbarea de variabilă x = t y, t > 0. Rezultă dx = tdy şi

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}y^{a-1},e^{-t\,y}tdy\Rightarrow\frac{\Gamma(a)}{t^a}=\int_0^\infty y^{a-1}e^{t\,y}dy$$

Înlocuind în această relație a cu a + b şi t cu t + 1 obținem

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(t+1)^{a+b}}=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(t+1)_y}dy\Rightarrow$$

$$\Gamma(a+b)\cdot\frac{t^{a-1}}{(t+1)^{a+b}}dt=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(t+1)_y}dy\right)dt$$

In membrul stâng vom face schimbarea de variabilă

$$\frac{t}{t+1}=x\Rightarrow t=\frac{x}{1-x}\ ;\ t+1=\frac{1}{1-x}\ ;\ dt=\frac{1}{(1-x)^2}dx$$

şi obținem

$$\int_0^\infty\frac{t^{a-1}}{(t+1)^{a+b}}dt=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{(1-x)^{a-1}}\cdot(1-x)^{a+b}\cdot\frac{1}{(1-x)^2dx}=$$

$$=\int_0^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}dx=B(a,b)$$

In membrul drept vom interveti ordinea de integrare, operație permisă de teorema lui fubini (vezi calculul integral al funcțiilor de mai multe variabile). Astfel obținem

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(t+1)_y}dy\right)dt=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(t+1)_y}dy\right)dt=$$

$$=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\left(\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t\,y}dt\right)dy=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(a)}{y^a}dy=$$

$$=\Gamma(a)\int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}dy=\Gamma(a)\Gamma(b)$$

Revenind la egalitatea de mai sus avem

$$\Gamma(a+b)\cdot B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)$$

Adică tocmai egalitate dorită.

Corolar. 1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

Demonstrație : 1. Vom aplica teorema precedentă pentru a = b = $\frac{1}{2}$.

Obținem :

$$\Gamma(1)\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

Dar $\Gamma(1)=1$ şi

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}dx=\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

Vom face aici schimbarea de variabilă :

$$x=\sin^2 t \quad , \quad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=2\sin\ t\ \cos\ tdt$$

Obținem

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2\sin t\ \cos\ tdt}{\sin t\ \cos t}=2t\ \Big|_0^{\pi/2}=\pi$$

In final avem $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=1\cdot\pi_0 \text{şi deci } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.\Rightarrow\int\limits_0^{\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx=\sqrt{\pi}$

Dacă facem aici schimbarea de variabilă $x=t^2$ obținem

$$\sqrt{\pi}=\int\limits_0^{\infty} t^{-1}e^{-t^2}\cdot 2tdt=2\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}dt\Rightarrow\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Atunci

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=2\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

Observație. Multe integrale trigonometrice se exprimă prin funcția Beta. Astfel

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} t \cos^{b-1} t dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right).$$

Intr-adevăr, dacă facem substituția $\sin^2 t = x$ avem

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} t \cos^{b-1} t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^{a-2} t \cos^{b-2} t \cdot \sin \ \cos \ t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{a}{2}-1} (1-x)^{\frac{b}{2}-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right).$$

Observație. Cu ajutorul funcției Gamma se pot calcula integrale esențiale pentru teoria probabilităților. Astfel

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^{(m+1)/2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \ ; \ a > 0, \ m > -1$$

Intr-adevăr, dacă facem substituția

$$ax^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{\frac{t}{a}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{ta}} dt$$

Obținem

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \int_0^{\infty} t^{m/2} a^{-m/2} e^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{ta}} dt =$$

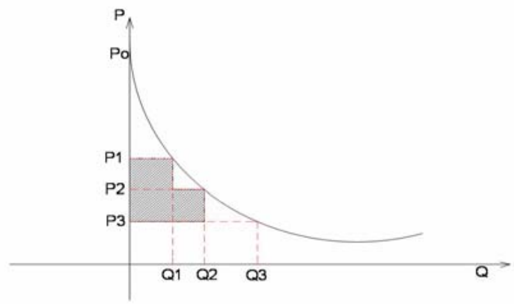
$$= \frac{1}{2a^{(m+1)/2}} \int_0^{\infty} t^{(m-1)/2} e^{-t} dt = \frac{1}{2a^{(m+1)/2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right).$$

Aplicații economice

Surplus al consumatorilor şi al producătorilor

Să presupunem mai întâi că avem o funcție a cererii discontinuă formată dintr-o serie de puncte :

$$(P_0, Q_0), (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), ..., [\ P_0 > P_1 > P_2 > .... \ ]$$



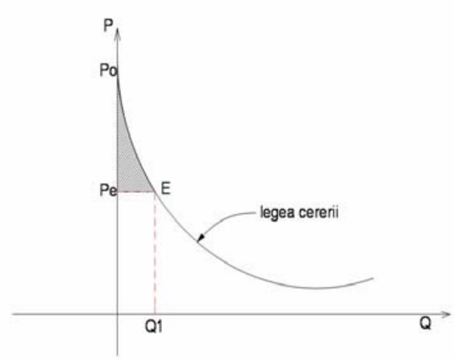
Dacă prețul s - a stabilit la P_0 nici un consumator nu va cumpăra. Dacă prețul s - a stabilit la P_1 el este cerut şi vândut în cantitatea Q_1. Dacă prețul s – a stabilit la P_2 este cerut şi vândut în cantitate Q_2. In acest caz printre consumatori se găsesc persoane care ar fi acceptat să plătească P_1 dar ei vor plăti P_2, pentru că prețul pe piață este unic. aceşti consumatori beneficiază de un surplus pe care îl putem evolua prin $(P_1 - P_2)\ Q_1$.

Acest produs nu este altceva decât aria unui dreptunghi. La fel dacă prețul s – ar stabili la P_3 fiecare consumator beneficiază de un surplus total :

$$(P_1 - P_3)\ Q_1 + (P_2 - P_3)(Q_2 - Q_1)$$

De la o funcție de cerere discontinuă putem trece uşor la o funcție de cerere continuă. Surplusul se va calcula folosind noțiunea de integrală.

Astfel dacă notăm cu P_E şi Q_E valorile prețului şi cantității la echilibru şi cu P_C legea cererii prețului în funcție de cantitate vom avea :



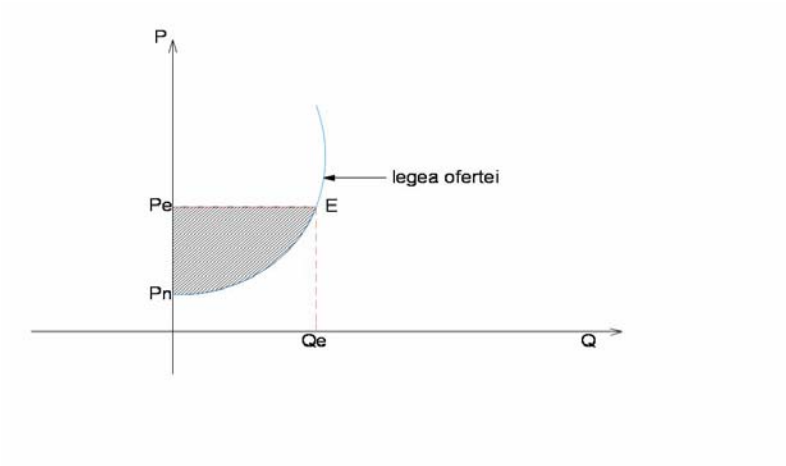
Surplusul consumatorilor este

$$SC = \int_0^{Q_E} P_C(Q)dQ - P_E \times Q_E$$

care nu este altceva decât aria triunghiului curbiliniu P_0EP_E.

Printr-un raționament analog vom putea stabili noțiunea de surplus al producătorilor SP. Astfel dacă notăm cu P_E prețul care se formează pe piață şi cu Q_E cantitatea corespunzătoare şi vom nota cu P_0 legea ofertei prețului în funcție de cantitate, producătorii care sunt dispuşi să cedeze produsele lor la un preț inferior lui P_E realizează un surplus SP reprezentat de aria unui triunghi curbiliniu P_EEP_N, arie ce se poate calcula prin :

$$SP = P_E \times Q_E - \int_0^{Q_E} P_0(Q)dQ.$$



Rata de creştere.

Funcția $\frac{f'}{f}$ este numită derivata logaritmică a funcției f. (Pentru că $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$). Numărul $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ este valoarea derivatei logaritmice în x_0 şi este numit rată de creştere a funcției f în x_0.

Propoziție. $\frac{f'(x)}{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = ke^{ax}$ (k, a constante reale).

Demonstrație.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = a \Leftrightarrow (\ln f)' = a \Leftrightarrow \ln f = \int adx = ax + C$$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^{ax+C} \Rightarrow f(x) = e^C \cdot e^{ax} \Leftrightarrow f(x) = ke^{ax}$$

Observație. Derivata logaritmică permie să calculăm un număr de rate de creştere economică. De exemplu dacă P (t) este o funcție de producție atunci derivate ei logaritmică

$$p(t) = \frac{P'(t)}{P(t)}$$

Ne dă rata de creştere a producției la momentul t.

Observație. In studiul evoluției cantității q (t) într-un interval de timp $[\ t_0, t_1\ ]$ putem considera

1. rata de creştere instantanee $a(t) = \frac{q'(t)}{q(t)}$
2. rata de creştere medie în perioada $[\ t_0, t_1\ ]$:

$$\bar{a} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} a(u)du.$$

Să notăm că avem $q(t_1) = q(t_0)e^{\bar{a}(t_1 - t_0)}$.

Intr-adevăr

$$\bar{a}(t_1 - t_0) = \int_{t_0}^{t_1} a(u)du = \int_{t_0}^{t_1} \frac{q'(u)}{q(u)}du = [\ \ln q(u)\ ]_{t_0}^{t_1} =$$

$$= \ln q(t_1) - \ln q(t_0) = \ln \frac{q(t_1)}{q(t_0)}$$

şi deci

$$e^{\bar{a}(t_1 - t_0)} = \frac{q(t_1)}{q(t_0)}$$

de unde relația dorită.